GEIPI 2^e^ année – ESIREM
2^e^ année 2^e^ semestre

Mars 2017

Optique – Contrôle continu 2
Diffraction – Descartes

Consignes : Durée 1h45, épreuve sans documents, avec calculatrice. Les exercices sont indépendants. La barème *approximatif* est indiqué pour chaque exercice.

- Lisez entièrement le sujet avant de commencer.
- Lisez plusieurs fois les questions : chaque mot a une signification.
- Écrivez toutes vos idées sur votre brouillon.

1 Diffraction par une ouverture rectangulaire (8 points)

On considère une ouverture plane rectangulaire de largeur a et de hauteur b, comme représenté en figure 1. On éclaire cette fente par une source monochromatique d'amplitude Ψ_0, de longueur d'onde λ et incidente sur l'ouverture selon la direction $\vec{u}_0$, vecteur unitaire dont les coordonnées sont $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$. On observe la figure de diffraction dans une direction quelconque, définie par le vecteur unitaire $\vec{u}$ de coordonnées (α, β, γ).

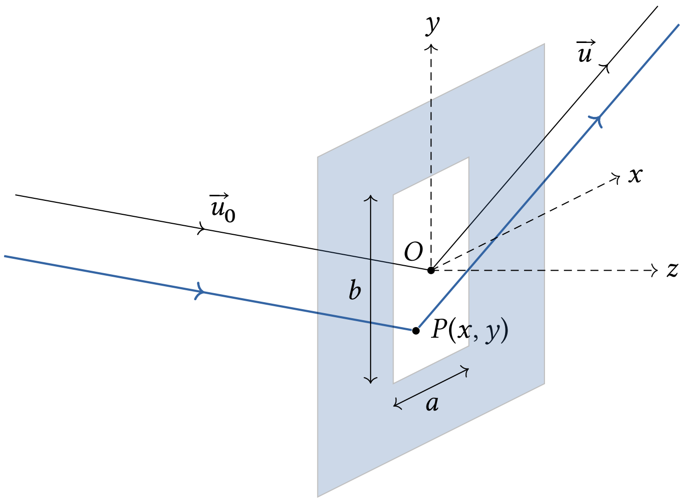


FIGURE 1 – Diffraction par une ouverture rectangulaire. L'onde incidente arrive selon le vecteur $\vec{u}_0$, et on observe la figure de diffraction dans la direction $\vec{u}$.

1 - 1 Énoncer les deux postulats fondamentaux du principe de Huygens-Fresnel qui permet de modéliser la diffraction.

1 - 2 Rappeler l'expression générale de l'amplitude de l'onde diffractée par une ouverture quelconque Σ dans l'approximation de Fraunhofer. On fera notamment apparaître les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{u}_0$, et le vecteur position d'un point quelconque de l'ouverture $\overrightarrow{OP}$.

1 - 3 Exprimer le produit scalaire $(\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \overrightarrow{OP}$ en fonction de des coordonnées α, β, α_0, β_0, et celles x et y de $\overrightarrow{OP}$.

1 - 4 Appliquer la formule de la diffraction de Fraunhofer à l'ouverture rectangulaire considérée et calculer l'amplitude Ψ dans la direction $\vec{u}$.

1 - 5 En déduire l'expression mathématique de l'intensité lumineuse dans la direction $\vec{u}$. Quelle est l'allure de la figure de diffraction ?

1 - 6 Pour quelle valeur de α l'intensité lumineuse s'annule-t-elle la première fois ? Même question pour β.

2 Transparence complexe sinusoïdale (6 points)

On considère une fente infinie dans la direction y et de largeur a dans la direction x. Cette fente est recouverte par une lame plus ou moins absorbante dont la transparence varie avec x selon la loi :

$$t(x) = \cos(\pi x/a) \tag{2.0.1}$$

On éclaire cette fente par une source de longueur d'onde λ, localisée à l'infini, incidente avec un angle d'incidence nul. On observe la figure de diffraction de cette fente dans une direction $\vec{u}\,(\alpha, \gamma)$ quelconque du plan (Oxz).

2 - 1 Rappeler l'expression générale de l'amplitude diffractée par une ouverture de transparence $t(x)$ dans le cadre de l'approximation de Fraunhofer.

2 - 2 Appliquer cette expression à la fente de transparence $t(x)$ et calculer l'amplitude diffractée. Afin de calculer l'intégrale, on exprimera le cosinus comme une somme d'exponentielles complexes et on se rappellera que $\sin(\theta + \pi/2) = \cos(\theta)$ et $\sin(\theta - \pi/2) = -\cos(\theta)$. On pourra également noter $\nu = \alpha a/\lambda$.

2 - 3 Mettre l'amplitude trouvée précédemment sous la forme :

$$\Psi = \frac{C\cos(\pi X)}{f(X)} \tag{2.0.2}$$

ou C est une constante à exprimer, X une fonction des variables (à exprimer également), et f une fonction elle aussi à exprimer. En déduire l'intensité I en fonction de ν.

2 - 4 Une analyse de cette fonction $I(X)$ montre qu'elle ne s'annule ni ne diverge en $X = 1/2$. Quand cette fonction s'annule-t-elle pour la première fois ? En déduire la largeur de la tache de diffraction obtenue.

3 Résolution d'un télescope (4 points)

3 - 1 Rappeler quel est le rayon angulaire de la frange centrale de la figure de diffraction d'une ouverture circulaire. On notera θ le rayon angulaire, λ la longueur d'onde et R le rayon de l'ouverture circulaire.

L'étoile polaire est en réalité constituée d'un système de deux étoiles : Alpha Ursae Minoris Aa et Alpha Ursae Minoris Ab. Ces deux étoiles sont séparées d'une distance de 18,8 unités astronomiques, et sont situées à une distance de $2{,}72 \times 10^7$ ua (soit 430 années lumières) du système solaire.

3 - 2 Quel devra être le rayon minimal R d'un télescope permettant de distinguer ces deux étoiles ? On supposera que la diffraction est le phénomène limitant la résolution du télescope, et

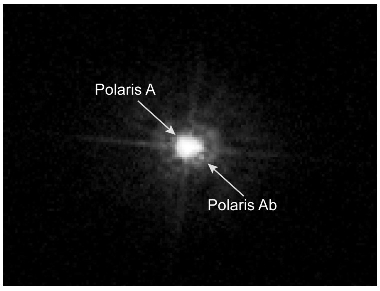
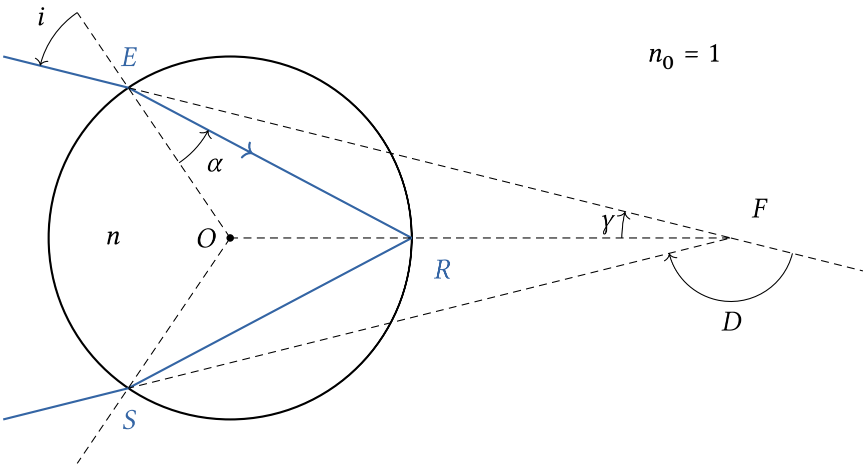


FIGURE 2 – Image prise par le télescope Hubble de l'étoile polaire, montrant les deux étoiles qui composent le système binaire : α Ursae Minoris Aa et α Ursae Minoris Ab (en anglais : Polaris Aa et Polaris Ab).

on travaillera dans l'ultraviolet, pour $\lambda = 220$ nm. Interpréter l'image de la figure 2 prise par le télescope spatial Hubble dont le diamètre est de 2,4 m. Par quel autre facteur la résolution est-elle limitée ici ?

4 Arc-en-ciel (9 points)

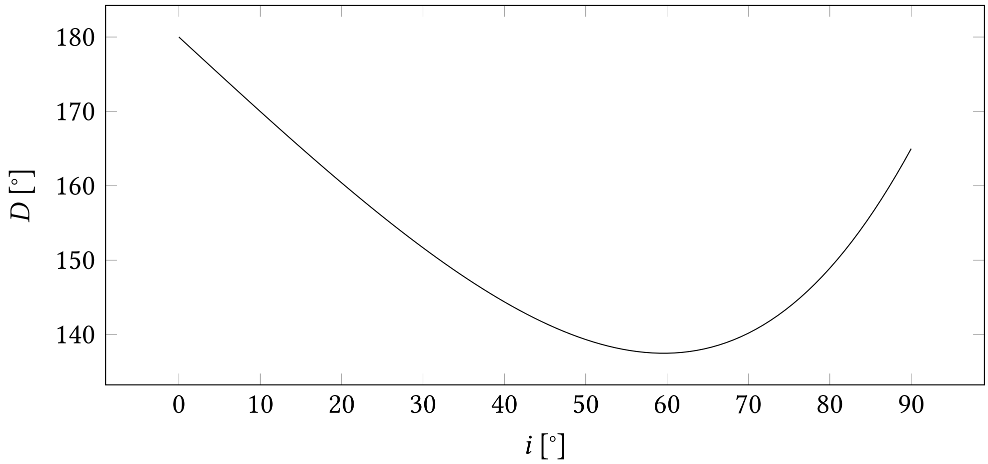
Un rayon lumineux entre en E dans une goutte d'eau (indice n) sphérique avec une incidence i. On considère que le rayon, une fois dans la goutte va subir une réflexion au point R, et repartira donc au point S pour sortir de la goutte d'eau.



4 - 1 On cherche à déterminer l'angle de déviation D en fonction de l'angle d'incidence i et de l'indice n de l'eau.

1. Déterminer les valeurs des trois angles du triangle OER sachant que O est le centre de la goutte.
2. Déterminer γ et en déduire D en fonction de i et α.
3. Donner l'expression de D en fonction de i et n.

L'allure de D en fonction de i pour $n = 1{,}33$ est donnée sur le graphe ci-dessous.



On suppose que le soleil éclaire uniformément la goutte d'eau, de sorte qu'elle est éclairée sous tous les angles d'incidence i entre 0 et $\pi/2$.

4 - 2 Justifier qualitativement grâce au graphique précédent que la goutte d'eau va renvoyer la lumière préférentiellement pour un angle de déviation proche de la déviation est minimale (le minimum de D). Montrer que la déviation est minimale pour un angle d'incidence i_0 tel que :

$$\cos i_0 = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}} \tag{4.0.1}$$

On se rappellera que la dérivée d'une fonction s'annule pour un extremum de cette fonction. On donne également la dérivée de la fonction asin :

$$\frac{\mathrm{d}\,(\mathrm{asin} x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{4.0.2}$$

4 - 3 L'indice optique de l'eau dépend de la longueur d'onde. Comment appelle-t-on cette propriété ? Cette dépendance est donnée pour quelques couleurs du spectre visible ci-après :

Couleur	Rouge	Vert	Indigo
Indice	1,329	1,335	1,339

Donner les valeurs de i_0 correspondant à chaque couleur. En déduire les valeurs minimales de déviation D_0 dans chaque cas. Justifier à l'aide des questions précédentes qu'on obtient bien une image colorée lorsque le soleil éclaire des gouttes d'eau.

Le soleil éclaire un mur de gouttes d'eau avec une incidence horizontale, et un observateur placé 1 km en avant du rideau de pluie observe la réflexion étudiée dans les questions précédentes.

4 - 4 Faire un schéma de la situation où intervient l'angle D. À quelle altitude sont situées les gouttes réfléchissant majoritairement du rouge dans la direction de l'observateur ? Mêmes questions pour le vert et l'indigo. Conclure quant à la formation d'un arc-en-ciel.