Exercice 1 : Cohérence temporelle et interféromètre de Michelson

L'interféromètre de Michelson permet de déterminer expérimentalement les caractéristiques des sources lumineuses régulièrement employées en travaux pratiques ou lors des montages du CAPES. Dans cet exercice, on se servira de la configuration « lame d'air »de l'interféromètre de Michelson pour déterminer les caractéristiques de différentes sources souvent rencontrées en travaux pratiques.

1 L'interféromètre de Michelson en lame d'air

Le montage expérimental est représenté ci-dessous :

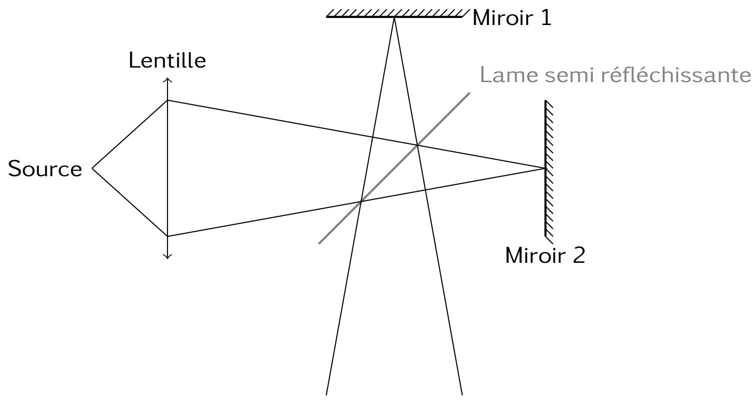

Figure 1 – Montage expérimental de l'interféromètre de Michelson en configuration lame d'air. Deux rayons extrémaux issus de la source sont représentés.

1. Dessiner le schéma équivalent du montage en lame d'air en faisant apparaître les deux miroirs, l'épaisseur e de la lame d'air ainsi qu'un rayon incident avec un angle quelconque i et les deux rayons émergents auxquels il donne naissance. On utilisera les propriétés de symétrie du montage. Où seront situées les interférences ?
2. Déterminer la différence de marche entre les deux rayons à l'endroit où ils se rencontrent. Calculer l'intensité lumineuse à cet endroit en supposant que l'intensité provenant de la source vaut I_0. Quelle sera la forme des interférences ?

2 Cohérence et interférences

On considère dans cette partie le cas d'une source lumineuse caractérisée par son spectre $S(\omega)$. On se place dans la configuration « lame d'air »du Michelson précédemment étudiée et on dispose un photodétecteur au centre de la figure d'interférence.

a) Interférences et polychromatisme

1. Donner l'expression de l'intensité captée par le détecteur pour une longueur d'onde donnée. Mettre cette expression sous la forme $I(\tau) = I_0[1 + \cos(\omega\tau)]$ où ω est la pulsation optique. Donner l'expression de τ ainsi que sa signification physique.
2. On considère un faible intervalle de pulsations optiques, entre ω et $\omega+d\omega$. On considèrera que l'intensité optique dans cet intervalle vaut $I_0S(\omega)$. Exprimer l'intensité dI captée par le

détecteur dans cet intervalle de pulsation. En déduire l'expression $I(\tau)$ de l'intensité sur tout le spectre de la source.

b) Cohérence et spectrométrie de Fourier

1. En utilisant les propriétés des nombres complexes, montrer que l'intensité reçue par le détecteur peut s'exprimer en fonction de la transformée de Fourier du spectre de la source.
2. Relier l'intensité $I(\tau)$ à la fonction de corrélation temporelle du rayonnement électro-magnétique.

3 Applications

a) Laser monochromatique

On considère un laser idéal, parfaitement monochromatique à la pulsation ω_0.

1. Donner l'expression du champ électrique d'une telle radiation.
2. Calculer l'expression de $g(\tau)$, la fonction normalisée de corrélation temporelle associée à ce rayonnement monochromatique.
3. En déduire la figure d'interférence observée avec un tel laser.
4. Calculer le temps de cohérence du laser. Commenter.

b) Lampes spectrales

Les lampes spectrales (sodium, mercure, cadmium parmi les plus connues) présentent des spectres optiques composés de raies plus ou moins fines. La largeur de ces raies d'émission est principalement due à l'effet Doppler et à la distribution de vitesse des molécules de gaz présentes dans la lampe. Cette répartition des vitesses des molécules est régie par la loi de Boltzmann : $P(E) = P_0 e^{-E/k_B T}$ où $P(E)$ est la probabilité de trouver une molécule à une énergie E, et T la température.

1. Exprimer l'énergie d'une molécule de gaz. En déduire la répartition des vitesses dans le gaz.
2. La fréquence émise par un émetteur en mouvement est reliée à la fréquence mesurée par un récepteur fixe par la relation de Doppler : $\nu = \frac{c}{c-v}\nu_0 \simeq (1+\frac{v}{c})\nu_0$. Montrer que le spectre d'une raie spectrale peut se mettre sous la forme :

$$S(\omega) = e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\sigma^2}} \tag{1}$$

   Donner l'expression de σ.
3. Application numérique : calculer la lageur spectrale (en pulsation et en longueur d'onde) d'une raie d'émission du sodium, à 589 nm. La masse molaire du sodium est de $23\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$, et la lampe est portée à une température de 500 K. On donne $k_B = 1{,}38\times10^{-23}\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$, $\mathcal{A} = 6\times10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$.
4. Calculer la figure d'interférence que l'on obtiendra avec l'interféromètre de Michelson. On rappelle la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{2}$$

c) Doublet du sodium

Le sodium présente deux raies d'émission très proches, vers 589 nm. On se propose de mesurer l'intervalle entre ces deux raies grâce au Michelson.

1. Comment peut on modéliser ce spectre ? On introduira notamment la largeur d'une raie et la distance entre celles-ci.
2. Calculer la figure d'interférence que l'on obtiendra avec cette source. Comment avec un enregistrement de cette figure peut-on remonter simplement aux caractéristiques spectrales de la source ?
3. L'enveloppe d'une figure d'interférence obtenue dans ces conditions est représentée en figure 2. On mesure une distance entre deux brouillages des franges (contraste nul) de 0,175 mm. En déduire la valeur de $\Delta\omega$ et $\Delta\lambda$.

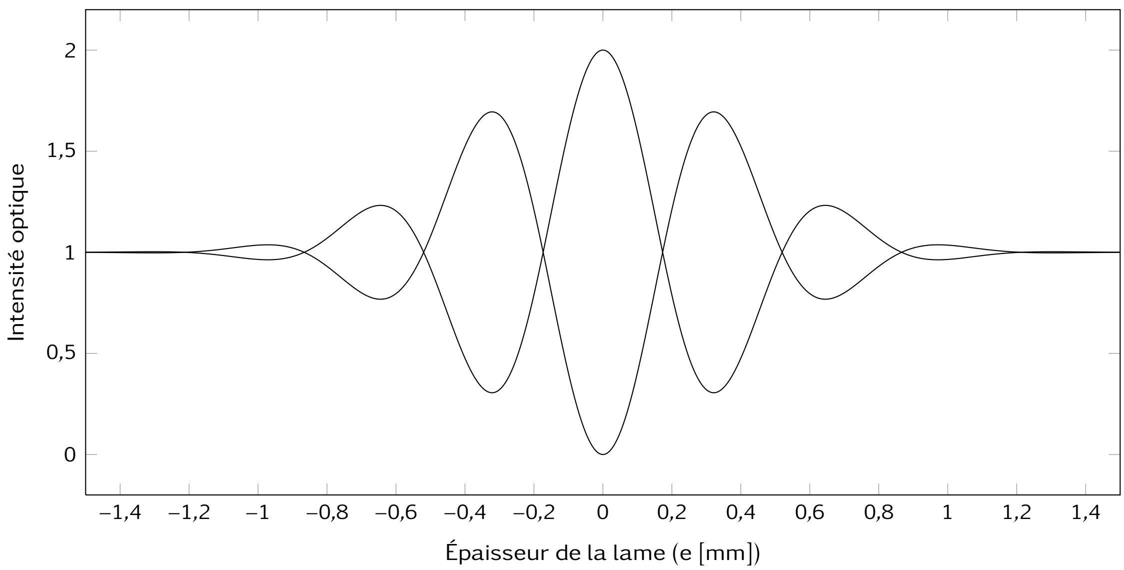

Figure 2 – Enveloppe de la figure d'interférence captée par le détecteur.

Exercice 2 : Mesure de diamètres apparents par interférométrie

1 Fentes d'Young

À l'aide d'un télescope, on pointe une étoile dont on cherche à connaître le diamètre. Un cache muni de deux orifices est placé sur la lentille frontale, de manière à ce que le parcours des rayons lumineux puisse être décrit par le schéma de la figure 3. La diffraction permet d'éclairer l'écran sur une longueur importante.

1. Calculer les longueurs l_1 et l_2 correspondant aux trajets optiques parcouru par les rayons issus de chaque trou et arrivant au point x de l'écran. En déduire le différence de marche et la figure d'interférence obtenue sur l'écran pour une onde arrivant perpendiculairement au dispositif.
2. Calculer la longueur T_1H en fonction de a et θ. Comme on utilise un télescope, les angles que l'on peut capter sont très faibles. Simplifier l'expression en conséquence.
3. En déduire l'expression de l'intensité sur l'écran pour des rayons issus de cet angle θ.

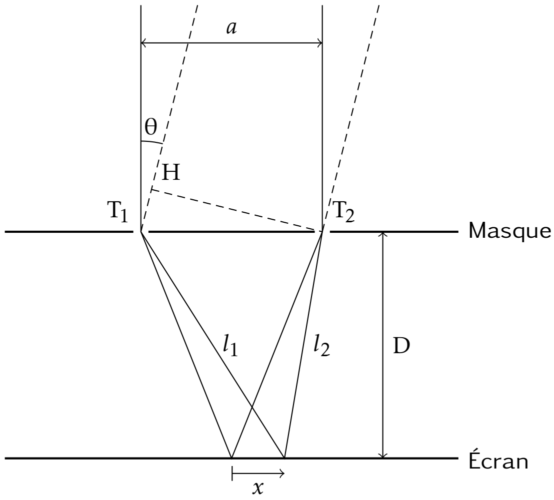

Figure 3 – Schéma du montage de l'expérience des trous d'Young. La lumière issue du centre de l'étoile arrive avec une incidence nulle sur le masque, mais les autres angles (par exemple θ) pénètrent dans le dispositif et viennent interférer sur l'écran.

2 Théorème de Van Cittert-Zernike

On considère ici une étoile caractérisée par une répartition d'intensité lumineuse $I_S(\theta)$.

1. En sommant l'expression précédente sur tous les angles, donner l'expression générale de $I(x)$ pour une source étendue.
2. En utilisant les propriétés des nombres complexes, montrer que la visibilité des franges d'interférence fait intervenir la transformée de Fourier spatiale de l'intensité de la source.

3 Applications

1. En supposant que l'intensité lumineuse de l'étoile est carrée, c'est à dire $I = I_0$ pour $\theta \in [-\theta_S; \theta_S]$ et 0 ailleurs, déterminer l'expression du terme de visibilité. Commenter le signe de ce terme.
2. Michelson (encore lui...), en 1891, utilise une lunette de 12 pouces ($\simeq$ 30 cm) pour observer Europe, un satellite de Jupiter. Il réalise la même expérience que nous venons d'étudier, et en faisant varier la distance entre les fentes, il trouve que le premier brouillage des franges arrive pour $a = 25{,}6$ cm à la longueur d'onde de 500 nm. Quel est le diamètre apparent d'Europe ? Jupiter se trouvant à une distance de 800 millions de km du Soleil, en déduire le diamètre réel d'Europe.
3. Sachant que les diamètres des plus grosses étoiles sont de l'ordre de 30 milliseconde d'arc, déterminer la distance entre les 2 trous d'Young nécessaire à la mesure de leur diamètre.

Exercice 3 : Faisceaux laser

1 Couplage d'un laser dans une fibre optique

On cherche à coupler le faisceau issu d'un laser hélium-néon (633 nm) dans une fibre optique monomode. Le faisceau laser collimaté (c'est à dire non focalisé) a un diamètre de mode initial de 2 mm. On emploie une fibre dont le cœur a un diamètre de 3,5 µm, permettant la propagation d'un mode de profil spatial gaussien de diamètre 4,3 µm.

1. Faire un schéma du dispositif de focalisation et représenter la propagation du faisceau.
2. Calculer la distance de Rayleigh pour le faisceau laser collimaté. Commenter.
3. Calculer l'angle de convergence du faisceau qui doit être couplé à la fibre.
4. Quelle lentille de couplage (distance focale, diamètre, type) doit-on placer devant la fibre et à quel endroit ?
5. Calculer la profondeur de champ associée à cette focalisation. Commenter la précision requise sur la position de la lentille de couplage par rapport à la face d'entrée.

Commentaire : Une fois le champ couplé dans la fibre optique, il ne diverge plus, son profil spatial transverse est stationnaire. C'est bien évidemment le grand intérêt du guide d'onde.

2 Quel diamètre de miroir choisir pour réfléchir un faisceau laser ?

La modélisation du profil transverse de l'intensité du faisceau par une fonction gaussienne pose le petit problème suivant : le champ ne s'annule jamais !
On veut réfléchir un faisceau laser gaussien dont le rayon de mode est w par un miroir dont le diamètre est d.

1. Calculer la fraction de puissance optique réfléchie par le miroir en fonction de w et d. On supposera le faisceau bien centré sur le miroir.
2. Calculer le rapport d/w permettant de réfléchir au moins 99% de la puissance optique incidente.

Exercice 4 : Impulsions optiques dans le domaine télécom

On considère un laser impulsionnel émettant autour de la longueur d'onde de 1,55 µm utilisée pour les télécommunications. Ces impulsions sont caractérisées par un profil temporel gaussien dont la durée à mi-hauteur (en intensité) vaut 10 ps.

1. Quelle est la période du champ électromagnétique à cette longueur d'onde ? En déduire le nombre de cycles optiques compris dans la durée à mi-hauteur de l'impulsion.
2. Établir la relation entre la durée à mi-hauteur de l'impulsion (Δt) et la largeur spectrale ($\Delta\lambda$) autour de λ_0. On utilisera la relation connue $\Delta f \Delta t = 2\ln(2)/\pi$. Calculer la largeur spectrale théorique des impulsions considérées.
3. On considère qu'il faut laisser un espace de durée égale à deux fois la durée à mi-hauteur entre deux impulsions pour qu'elles ne se recouvrent pas (le *rapport cyclique* vaut 1/3). Estimer le débit d'un canal de transmission utilisant ces impulsions.
4. Le laser émet avec une puissance moyenne de 10 mW. Calculer la puissance crête approximative ainsi que l'énergie de chaque impulsion.
5. Calculer le nombre de photons par impulsion.