

Optique ondulatoire

GEIPI 2A

A. Coillet

aurelien.coillet@u-bourgogne.fr

Année universitaire 2019-2020



Table des matières

1	Caractère ondulatoire de la lumière	4
1.1	Des équations de Maxwell à l'équation de d'Alembert	4
1.2	Solutions de l'équation de d'Alembert	5
1.3	Propriétés des ondes électromagnétiques	7
2	Interférences	10
2.1	Superposition de deux ondes lumineuses	10
2.2	Cohérences	13
2.3	Exemples classiques	15
2.4	Interférences de deux sources ponctuelles	16
2.5	Interféromètre de Michelson	20
2.6	Interférences en lumière polychromatique	22
2.7	Fabry-Pérot	25
3	Diffraction	27
3.1	Principe de Huygens-Fresnel et diffraction de Fraunhofer	28
3.1.1	Principe d'Huygens-Fresnel	28
3.1.2	Diffraction de Fresnel	29
3.1.3	Diffraction de Fraunhofer	30
3.1.4	Diffraction à l'infini par un diaphragme plan	31
3.1.5	Diffraction par un diaphragme de phase ou d'amplitude	31
3.1.6	Théorème de Babinet	32
3.2	Applications	32
3.2.1	Ouverture rectangulaire	32
3.2.2	Fente infinie	34
3.2.3	Ouverture circulaire	35
3.2.4	Rôle de la diffraction dans la formation des images	36
3.2.5	Fentes d'Young	37
3.2.6	Diffraction par des motifs jumeaux translétés	38

Introduction

L'optique est la branche de la physique qui s'intéresse à la *lumière*, à son comportement, ses propriétés, et son utilisation. Aujourd'hui, l'optique peut se diviser en trois domaines :

- L'optique *géométrique* étudie la propagation de la lumière et la formation d'images au travers d'instruments (dioptrés, lentilles, miroirs, groupes d'instruments) en utilisant la

notion de rayon lumineux. Cette partie a été abordée en 1^{re} année et sera approfondie dans ce cours.

- L'optique *ondulatoire* est apparue au XIX^e siècle et décrit la lumière comme une onde régie par les équations de Maxwell. Cette description permet d'expliquer les phénomènes d'interférence, de diffraction et de diffusion, phénomènes qui seront abordés dans ce cours.
- L'optique *quantique* a été développée au XX^e siècle et utilise la notion de photon, c'est-à-dire de particule de lumière, pour expliquer les interactions de la lumière avec les particules, atomes ou molécules. Cet aspect est abordé en cours de spectroscopie et physique quantique.

Ces trois domaines de l'optique continuent à faire l'objet de recherches académiques et industrielles : les performances des instruments d'optique (objectifs photographiques, télescopes à optique adaptative, lunettes, ...) sont améliorées en utilisant les notions de l'optique géométrique. L'optique ondulatoire est au cœur des réseaux de transmission de l'information, des lasers, de l'holographie, des mesures de hautes précisions (par exemple dans les très récentes mesures d'ondes gravitationnelles), ... Quant à l'optique quantique, elle est à la base des diodes, lasers, photodétecteurs, caméras et écrans actuels, entre autres.

Dans ce cours, nous commencerons par étudier le caractère ondulatoire de la lumière, à partir des notions qui ont été vues en électromagnétisme. On s'intéressera en particulier aux phénomènes *d'interférence* et de *diffraction*. La deuxième partie du cours sera consacrée à l'approfondissement des notions d'optique géométrique vues en 1^{re} année dans le but de comprendre le fonctionnement de différents instruments d'optiques tels que le microscope, le télescope ou l'œil.

1 Caractère ondulatoire de la lumière

1.1 Des équations de Maxwell à l'équation de d'Alembert

Vous avez vu en cours d'électromagnétisme que les équations de Maxwell régissent le comportement des champs électriques et magnétiques. Dans le *vide* (pas de charge $\rho = 0$ ni de courant $\vec{j} = \vec{0}$), elles s'écrivent :

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (1.1.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad \operatorname{rot} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (1.1.2)$$

où \vec{E} et \vec{B} sont les champs électrique et magnétique, $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ A}^2 \text{ s}^4 \text{ kg}^{-1} \text{ m}^{-3}$ est la permittivité du vide, et $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ kg m A}^{-2} \text{ s}^{-2}$ est la perméabilité du vide.

Ces équations montrent que le champ électrique et le champ magnétique sont couplés par le biais de dérivées : les variations temporelles du champ électrique sont liées aux variations spatiales du champ magnétique et réciproquement. On peut découpler ces équations (c'est-à-dire obtenir deux équations, une pour \vec{E} seulement et l'autre pour \vec{B} seulement) en dérivant une seconde fois.

Démonstration équation de d'Alembert pour \vec{E}

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}} \qquad (1.1.3)$$

On peut montrer par la même méthode que le champ magnétique suit la même équation. On obtient ainsi deux *équations de d'Alembert* qui couplent les dérivées secondes temporelle et spatiales d'une même quantité. Cette équation décrit un grand nombre de *phénomènes de propagation* dans de nombreux domaines de la physique¹ et ses solutions sont des *ondes*. Le paramètre c définit comme suit :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1} \qquad (1.1.4)$$

est homogène à une vitesse et est appelé *célérité* des ondes électromagnétiques. Le fait que la valeur de cette vitesse soit proche de celle de la lumière mesurée expérimentalement par

1. ondes acoustiques, corde vibrante, pendules couplés, tension électrique dans un câble coaxial, ...

les physiciens du XIX^e siècle a conduit à émettre l'hypothèse que *la lumière est une onde électromagnétique*. Cette hypothèse a été confirmée par des recherches ultérieures.

On peut montrer (à faire en exercice) que dans un milieu homogène d'indice n , les champs électrique et magnétique vérifient également une équation de d'Alembert pour laquelle le paramètre c devient :

$$v = \frac{c}{n} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0}} \quad (1.1.5)$$

où v est la vitesse de l'onde et ϵ_r est appelée la permittivité relative du milieu considéré.

1.2 Solutions de l'équation de d'Alembert

En coordonnées cartésiennes, le laplacien vectoriel s'écrit :

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \begin{cases} \Delta E_x \vec{u}_x = \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right) \vec{u}_x \\ \Delta E_y \vec{u}_y = \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \right) \vec{u}_y \\ \Delta E_z \vec{u}_z = \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \right) \vec{u}_z \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Il est donc possible de séparer l'équation 1.1.3 en 3 équations indépendantes pour chacune des composantes. Par exemple, pour la composante E_x (selon la direction \vec{u}_x), on a :

$$\Delta E_x - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \quad (1.2.2)$$

On passe donc de 2 équations vectorielles (pour \vec{E} et \vec{B}) à 6 équations scalaires ($E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$), ce qui est bien plus facile à traiter. On peut montrer que les solutions de cette équation sont des fonctions de la forme :

$$E_x = f_{\pm}(\vec{u} \cdot \vec{r} \pm ct) \quad (1.2.3)$$

où f_{\pm} sont des fonctions quelconques et \vec{u} est un vecteur unitaire quelconque. La dépendance en $\vec{u} \cdot \vec{r} \pm ct$ indique une potentielle *propagation* non déformée de la fonction f_{\pm} à la vitesse c dans la direction \vec{u} . Ces solutions sont appelées *ondes* et nous allons en étudier quelques unes particulièrement importantes dans la suite.

Onde plane On appelle *onde plane* une onde dont l'amplitude a tout instant est identique dans les plans orthogonaux à une direction fixe et unique dans l'espace \vec{u} . Ces plans orthogonaux sont appelés *fronts d'onde*.

Onde plane progressive et stationnaire On appelle *onde plane progressive* une onde plane se propageant dans une direction \vec{u} . Mathématiquement, une onde de la forme $f(\vec{u} \cdot \vec{r} - ct)$ se propage dans le sens de \vec{u} alors qu'une onde de la forme $f(\vec{u} \cdot \vec{r} + ct)$ se propage dans le sens opposé à \vec{u} . Considérons par exemple une onde progressive en 1 dimension, de

la forme $f(x - ct)$. Son amplitude au point $x = x_0$ et au temps $t = t_0$ sera donc $f(x_0 - ct_0) = f(0 - c(t_0 - x_0/c))$: elle sera donc égale à la valeur que prenait l'amplitude de l'onde au point $x = 0$ et au temps $t = t_0 - x_0/c$, ce qui correspond bien à un déplacement de l'onde dans le sens des x croissants.

La somme de deux ondes planes progressives se propageant en sens inverse ($+\vec{u}$ et $-\vec{u}$) conduit à une *onde plane stationnaire*. Dans ce cas, la déformation associée à l'onde ne se déplace pas.

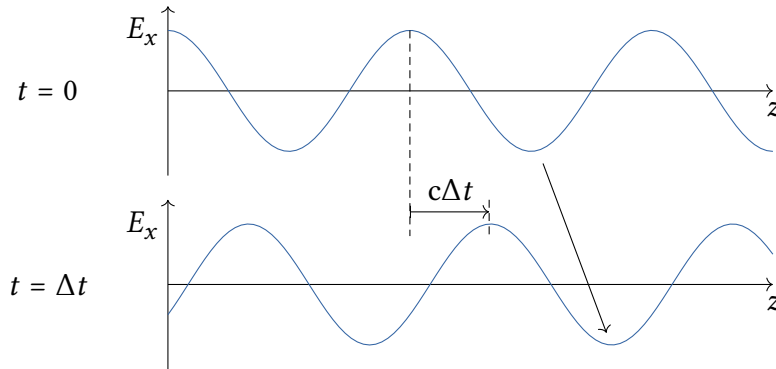


FIGURE 1.1 – Propagation de la composante E_x d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique selon la direction \vec{u}_z . Après un temps Δt , le motif de l'onde s'est déplacé d'une distance $c\Delta t$.

Onde plane progressive harmonique On appelle *onde plane progressive harmonique* (ou *monochromatique*) une onde plane progressive dont les composantes sont sinusoïdales :

$$E_x = E_{x_0} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (1.2.4)$$

où la pulsation ω est commune à toutes les composantes du champ électromagnétique, mais les amplitudes sont à priori différentes. Le vecteur d'onde \vec{k} est orienté selon la direction de propagation de l'onde, et sa norme vaut :

$$\|\vec{k}\| = k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.2.5)$$

T est la période de l'onde, f sa fréquence, et λ sa longueur d'onde. L'analyse de Fourier prévoit que toute fonction $f(t)$ peut se décomposer sous la forme d'une somme (infinie) de fonctions sinusoïdales du temps. Toute onde électromagnétique peut donc se mettre sous la forme d'une superposition d'ondes planes progressives harmoniques, la somme portant sur la direction de propagation \vec{u} et sur la pulsation ω . Dans la suite du cours, on considérera donc principalement des ondes de ce type.

Par commodité, on utilisera la *notation complexe* :

$$\underline{E}_x = E_{x_0} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (1.2.6)$$

Le passage de cette notation complexe à l'expression de l'équation 1.2.4 se fait en prenant simplement la partie réelle de l'expression complexe. On introduit également l'*amplitude complexe* qui laisse de côté l'oscillation temporelle, et ne dépend donc plus que de l'espace :

$$\underline{E}_{x_0} = E_{x_0} e^{i(-\vec{k}\cdot\vec{r})} \quad \text{de sorte que} \quad \underline{E}_x = \underline{E}_{x_0} e^{i\omega t} \quad (1.2.7)$$

Onde sphérique Une *onde sphérique* est une onde émise par une source ponctuelle dans un milieu homogène. Dans ce cas, les directions de propagations sont orientées selon le vecteur \overrightarrow{SM} , où S est la source et M le point considéré.

1.3 Propriétés des ondes électromagnétiques

Domaines des ondes électromagnétiques On classe les ondes électromagnétiques selon leurs pulsations ω (ou de manière équivalente, leurs longueurs d'onde λ) en différentes catégories : ondes radio, micro-ondes, infrarouge, visible, ultraviolet, rayons X, rayons γ . Ces domaines sont représentés en figure 1.2. On remarque que le domaine du visible, correspondant à ce que nous appelons « lumière », n'occupe qu'une infime partie de ce spectre.

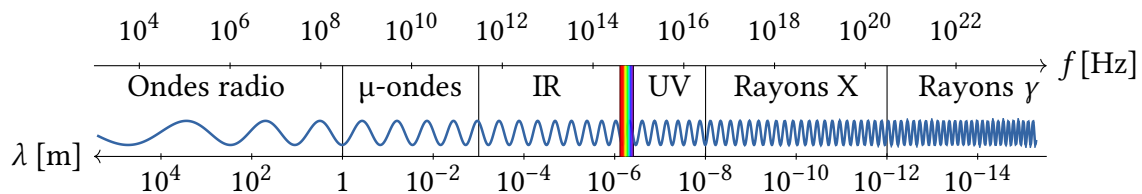


FIGURE 1.2 – Domaines du spectre électromagnétique.

Chemin optique Le temps mis par l'onde électromagnétique pour aller d'un point A à un point B selon une trajectoire \mathcal{C} vaut :

$$t_{AB} = \int_{\mathcal{C}} \frac{ds}{v(s)} = \frac{1}{c} \int_{\mathcal{C}} n(s) ds \quad (1.3.1)$$

où $v(s)$ et $n(s)$ représente la vitesse et l'indice du milieu au point s . La quantité $(AB) = \int_{\mathcal{C}} n(s) ds$, homogène à une longueur, est appelée *chemin optique*.

Dans le cas d'un milieu homogène, c'est-à-dire où l'indice ne varie pas, $n(\vec{r}) = n_0 = \text{cte}$, le chemin optique (AB) vaut simplement :

$$(AB) = n_0 AB \quad (1.3.2)$$

Phase et déphasage optique La définition du chemin optique nous permet de généraliser le terme $\vec{k} \cdot \vec{r}$ de l'équation 1.2.6 à des ondes ne se propageant pas nécessairement toujours

dans la même direction. Ainsi, la propagation de l'onde entre un point source S et un point d'observation M selon une trajectoire \mathcal{C} conduit à un déphasage :

$$\varphi_{SM} = \vec{k} \cdot \int_{\mathcal{C}} \vec{dr} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \int_{\mathcal{C}} n(s) ds = \frac{2\pi(SM)}{\lambda_0} \quad (1.3.3)$$

où $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$ est la longueur d'onde *dans le vide*, et la grandeur $\varphi_{SM} = 2\pi(SM)/\lambda_0$ est appelée *phase* de l'onde. L'expression mathématique d'une onde progressive monochromatique au point M et au temps t , émise par une source S peut donc s'écrire :

$$E_x(M, t) = E_{x_0}(M) e^{i(\omega t - 2\pi(SM)/\lambda_0)} \quad (1.3.4)$$

Nous verrons par la suite qu'une phase seule n'est pas très utile, mais que c'est la *différence de phase* entre 2 ondes qui possède un sens physique très important. Ce concept est illustré sur la figure 1.3.

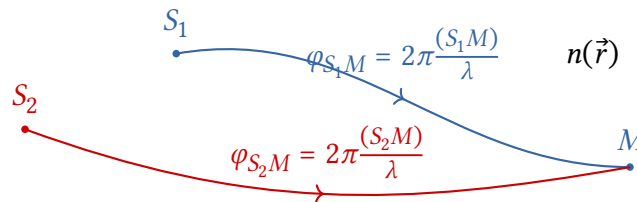


FIGURE 1.3 – Deux sources lumineuses S_1 et S_2 émettent des ondes électromagnétiques qui se propagent selon des chemins différents pour arriver en M . Durant ce trajet, ces deux ondes auront accumulé des phases φ_{S_1M} et φ_{S_2M} différentes, et le déphasage entre les deux ondes au point M sera donc $\varphi_{S_2M} - \varphi_{S_1M}$.

Surface et front d'onde On appelle *surface d'onde*, ou *front d'onde* une surface où le chemin optique (ou de manière équivalente, sa phase) de l'onde est constant à un instant donné, c'est à dire où $(AB) = \text{constante}$. Dans le cas d'une onde plane, les fronts d'onde sont des plans perpendiculaires au vecteur d'onde \vec{k} , et pour une onde sphérique, les fronts d'onde sont des sphères centrées sur la source lumineuse.

Additivité Si de la lumière est émise depuis plusieurs sources (notées S_i), les amplitudes instantannées des champs s'ajoutent. En un point M quelconque et à un temps t quelconque, l'amplitude du champ électrique s'écrit mathématiquement :

$$\vec{E}(M, t) = \sum_i \vec{E}_i(M, t) \quad (1.3.5)$$

Ce principe est *fondamental* pour la bonne compréhension des phénomènes d'interférence et de diffraction, et nous l'utiliserons constamment.

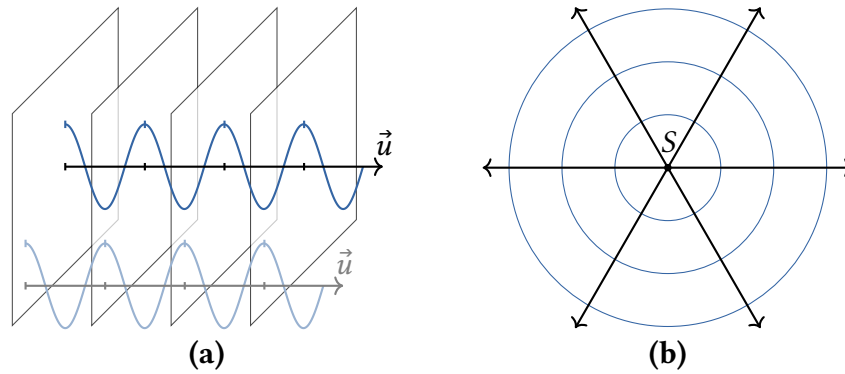


FIGURE 1.4 – (a) Fronts d’onde d’une onde plane se propageant dans la direction \vec{u} . (b) Fronts d’onde d’une onde sphérique émise depuis un point source S .

Intensité lumineuse Compte-tenu des fréquences très élevées des ondes lumineuses ($f \sim 1 \times 10^{15}$ Hz), un détecteur d’ondes lumineuses ne peut que faire une moyenne temporelle. L’amplitude moyenne du champ électromagnétique étant nulle (il s’agit de sinusoides), un détecteur sensible à cette amplitude moyenne serait inutile. Les photo-détecteurs sont donc sensibles à l’*intensité lumineuse*, qu’on définit comme la moyenne temporelle du flux du vecteur de Poynting :

$$I = \left\langle \iint_S \vec{E} \times \vec{H} \cdot d\vec{S} \right\rangle_t = \frac{n}{\mu_0 c} \left\langle \iint_S |E|^2 dS \right\rangle_t \quad (1.3.6)$$

$$I = \frac{nS}{\mu_0 c} \langle |E|^2 \rangle_t = \frac{nS}{2\mu_0 c} \underline{E} \underline{E}^* \quad (1.3.7)$$

Il est important de noter que l’intensité lumineuse est proportionnelle au carré du champ, et donc de moyenne non nulle ($\langle \sin^2 \omega t \rangle_t = 1/2$). En notation complexe et dans le cas d’une onde monochromatique, le produit scalaire $\underline{E} \cdot \underline{E}^*$ élimine la dépendance temporelle ($e^{i\omega t} \cdot e^{-i\omega t}$), de sorte que la moyenne temporelle n’est pas nécessaire. Par commodité de notation, nous omettrons la constante $nS/(\mu_0 c)$ et écrirons l’intensité lumineuse comme le carré du module du champ électrique :

$$I = \langle |E|^2 \rangle_t = \frac{1}{2} \underline{E} \underline{E}^* \quad (1.3.8)$$

2 Interférences

Le modèle d'onde lumineuse introduit dans le chapitre précédent fait apparaître deux grandeurs physiques importantes : l'amplitude instantannée de l'onde $\vec{E}(M, t)$ et l'intensité lumineuse $I(M) \propto \langle E(M, t)^2 \rangle_t$. Comme l'amplitude instantannée est additive, on peut s'attendre à ce que l'intensité lumineuse ne le soit pas. Expérimentalement, on peut obtenir des situations où deux ondes lumineuses uniformes ($I_1(M) = \text{cte}$, $I_2(M) = \text{cte}$) produisent une intensité lumineuse non uniforme ($I_{\text{tot}}(M) \neq \text{cte}$). On appelle ce phénomène *interférences lumineuses*.

2.1 Superposition de deux ondes lumineuses

On considère deux sources ponctuelles S_1 et S_2 , monochromatiques de pulsations respectives ω_1 et ω_2 et d'amplitudes E_{1_0} et E_{2_0} . Un point M reçoit les deux ondes :

$$\vec{E}_1(M, t) = E_{1_0} e^{i\left(\omega_1 t - 2\pi \frac{(S_1 M)}{\lambda_{1_0}}\right)} \vec{u}_1 = E_{1_0} e^{i(\omega_1 t - \varphi_{1M})} \vec{u}_1 \quad (2.1.1)$$

$$\vec{E}_2(M, t) = E_{2_0} e^{i\left(\omega_2 t - 2\pi \frac{(S_2 M)}{\lambda_{2_0}}\right)} \vec{u}_2 = E_{2_0} e^{i(\omega_2 t - \varphi_{2M})} \vec{u}_2 \quad (2.1.2)$$

où $(S_1 M)$ et $(S_2 M)$ sont les chemins optiques respectifs des deux ondes depuis leurs sources S_1 et S_2 jusqu'au point M . D'après le principe d'additivité (1.3.5), l'amplitude instantannée au point M s'écrit :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_1(M, t) + \vec{E}_2(M, t) \quad (2.1.3)$$

L'intensité totale peut donc se calculer :

Calcul de l'intensité lumineuse

Ainsi, l'intensité lumineuse totale au point M s'exprime :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2E_{1_0} E_{2_0} \langle \cos((\omega_2 - \omega_1)t - (\varphi_{2M} - \varphi_{1M})) \rangle_t \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \quad (2.1.4)$$

Conditions d'interférence On voit donc que l'intensité lumineuse n'est en général *pas additive*, puisqu'il existe un troisième terme potentiellement non nul dans l'expression de l'intensité lumineuse. Les conditions pour que ce terme d'interférence soit non nul, c'est-à-dire pour avoir $I \neq I_1 + I_2$, s'écrivent :

$$\langle \cos((\omega_2 - \omega_1)t - (\varphi_{2M} - \varphi_{1M})) \rangle_t \neq 0 \quad \text{et} \quad \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \neq 0 \quad (2.1.5)$$

La première condition n'est possible que si la différence de pulsation $\omega_2 - \omega_1$ est nulle et que le déphasage $\varphi_{2M} - \varphi_{1M}$ est constant :

$$\omega_2 = \omega_1 = \omega \quad \text{et} \quad \varphi_M = \varphi_{2M} - \varphi_{1M} = \text{cte} \quad (2.1.6)$$

Les 2 ondes doivent donc avoir *la même pulsation* et un *déphasage constant*. On dit alors que les deux sources S_1 et S_2 sont *cohérentes*. Nous reviendrons sur cette notion importante dans une prochaine section.

On remarque également que le produit scalaire $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2$ doit être non nul : *deux ondes polarisées perpendiculairement n'interfèrent donc pas*.

En résumé, on a donc :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_M) \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \quad (2.1.7)$$

Différence de marche Le déphasage φ_M entre les deux ondes peut s'exprimer en fonction du chemin optique parcouru par les deux ondes :

$$\varphi_M = \varphi_{2M} - \varphi_{1M} = \varphi_{S_2} - \varphi_{S_1} + \frac{2\pi}{\lambda_0} ((S_2M) - (S_1M)) \quad (2.1.8)$$

où φ_{S_1} et φ_{S_2} sont les phases initiales (à $t = 0$) des deux sources lumineuses. Pour alléger les calculs, on définit la *différence de marche* en M telle que :

$$\delta_M = (S_2M) - (S_1M) \quad \text{et} \quad \varphi_M = \varphi_{S_2} - \varphi_{S_1} + 2\pi \frac{\delta_M}{\lambda_0} \quad (2.1.9)$$

La différence de marche δ_M est homogène à une distance et dépend du point M considéré; on s'attend donc à obtenir une intensité lumineuse *non uniforme* : $I(M) \neq \text{cte}$. Le calcul de la figure d'interférence reviendra donc le plus souvent à calculer une différence de longueurs entre deux parcours de la lumière.

Franges d'interférences À partir de la relation 2.1.7 on comprend bien que selon la valeur de φ , l'intensité lumineuse sera différente. En particulier, si $\varphi = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$, les ondes sont en phase, et le cosinus est positif. On a donc $I > I_1 + I_2$ et on parle d'*interférence constructive*. Au contraire, si $\varphi = \pi + 2k\pi$, les ondes sont déphasées, $I < I_1 + I_2$ et l'interférence est *destructive*. La figure 2.1 résume graphiquement ces définitions.

Pour caractériser expérimentalement les interférences lumineuses, on définit les *franges d'interférences* comme les surfaces où l'intensité $I(M)$ est constante. Une frange brillante sera donc la surface où les ondes interfèrent constructivement, et une frange sombre correspondra aux endroits où les ondes interféreront destructivement.

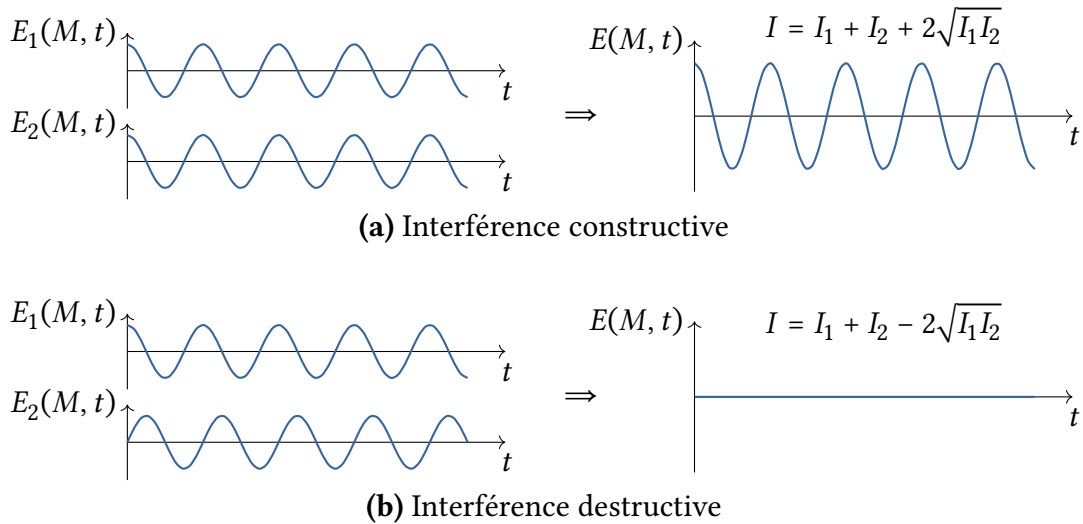


FIGURE 2.1 – Définition des interférences constructive et destructive (dans le cas où $I_1 = I_2$ et (a) $\varphi = 0$, (b) $\varphi = \pi$).

Cas idéal Dans la pratique, on choisit souvent de travailler avec des polarisations parallèles, et on a donc $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 1$. L'équation 2.1.7 devient donc :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi) \quad (2.1.10)$$

$$= (I_1 + I_2) \times (1 + V \cos(\varphi)) \quad (2.1.11)$$

avec V le *contraste* (ou *facteur de visibilité*) défini par :

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (2.1.12)$$

Dans le cas où $I_1 = I_2 = I_0/2$, le facteur de visibilité vaut $V = 1$ et on a :

$$I = I_0(1 + \cos \varphi) \quad (2.1.13)$$

En résumé Le calcul des franges d'interférences suivra la plupart du temps la méthode détaillée précédemment, que nous pouvons résumer ainsi :

1. Exprimer les amplitudes complexes $E_1(M)$ et $E_2(M)$ des champs électriques issus des sources S_1 et S_2 au point M ,
2. Exprimer le champ total au point M : $E(M) = E_1(M) + E_2(M)$,
3. Calculer l'intensité lumineuse correspondante : $I(M) = E(M)E^*(M)$,
4. L'expression obtenue fera intervenir une différence de marche $\delta = (S_2M) - (S_1M)$ qu'il faudra calculer (ce que nous aborderons dans les sections suivantes),
5. Interpréter et donner l'allure de la figure d'interférences.

2.2 Cohérences

Modélisation des sources monochromatiques L'expérience montre que l'intensité lumineuse engendrée par deux sources ponctuelles monochromatiques différentes est uniforme, c'est-à-dire qu'on n'observe pas d'interférences. Pour interpréter qualitativement ce fait, il est nécessaire d'affiner le modèle de source monochromatique que nous avons utilisé.

On peut modéliser de manière plus réaliste une source monochromatique en considérant que la pulsation ω n'est en fait pas strictement constante dans le temps : $\omega(t) = \omega_0 + \delta\omega(t)$. Cela est équivalent à écrire que la phase initiale φ_S dépend du temps : $\varphi_S(t) = \delta\omega(t) \times t$. De manière générale, la fonction $\delta\omega$ est une fonction aléatoire (du *bruit*) du temps, et dépend de la source considérée. Ainsi, le déphasage entre deux sources indépendantes s'écrit :

$$\varphi_M(t) = \varphi_{S_2}(t) - \varphi_{S_1}(t) + 2\pi \frac{\delta_M}{\lambda_0} \quad (2.2.1)$$

La moyenne temporelle du cosinus d'une variable aléatoire étant nulle, la condition du 2.1.5 n'est pas vérifiée, et il n'y a donc pas d'interférences.

Un autre modèle de source monochromatique s'appuie sur la mécanique quantique, qui prévoit que l'émission de lumière se fait par *trains d'ondes* (ou *paquets d'ondes*) d'une durée finie τ . Dans ce modèle, les paquets d'ondes successifs ont la même fréquence mais possèdent chacun une phase aléatoire, comme schématisé en figure 2.2. Ainsi, deux paquets d'ondes peuvent interférer uniquement si cette phase est constante, soit sur une durée inférieure à τ . Pour une lampe spectrale $\tau \sim 1 \times 10^{-11}$ s, ce qui est très court devant le temps de réponse des détecteurs, et on ne voit ainsi pas d'interférence pour deux ondes issues de sources distinctes.

Ces deux modèles aboutissent à la même conclusion, et on retiendra que *deux sources distinctes n'interfèrent pas*, elles sont dites *incohérentes*. Dans ce cas, l'intensité lumineuse est additive : $I(M) = I_1(M) + I_2(M)$.

Division d'amplitude et de front d'onde Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que deux sources différentes ne pouvaient pas produire de figure d'interférence. Afin d'observer ces interférences, il nous faudra donc partir d'une seule et unique source lumineuse, la séparer en deux bras différents où les deux ondes filles accumuleront des phases différentes, puis les combiner à nouveau. Cette division (et re-combinaison) des ondes lumineuses peut s'effectuer de deux manières différentes :

Division du front d'onde : l'onde émise par la source est divisée *spatialement*. Ainsi, les deux ondes qui interfèrent proviennent de deux endroits différents.

Division d'amplitude : les deux ondes filles sont issues des mêmes emplacements, elles sont spatialement identiques. Seule l'amplitude est divisée.

Dans la suite, nous verrons des dispositifs interférentiels de ces deux catégories.

Cohérence temporelle Considérons maintenant une onde émise par une même source S , divisée en deux parties parcourant deux chemins optiques différents $(SM)_1$ et $(SM)_2$. Le

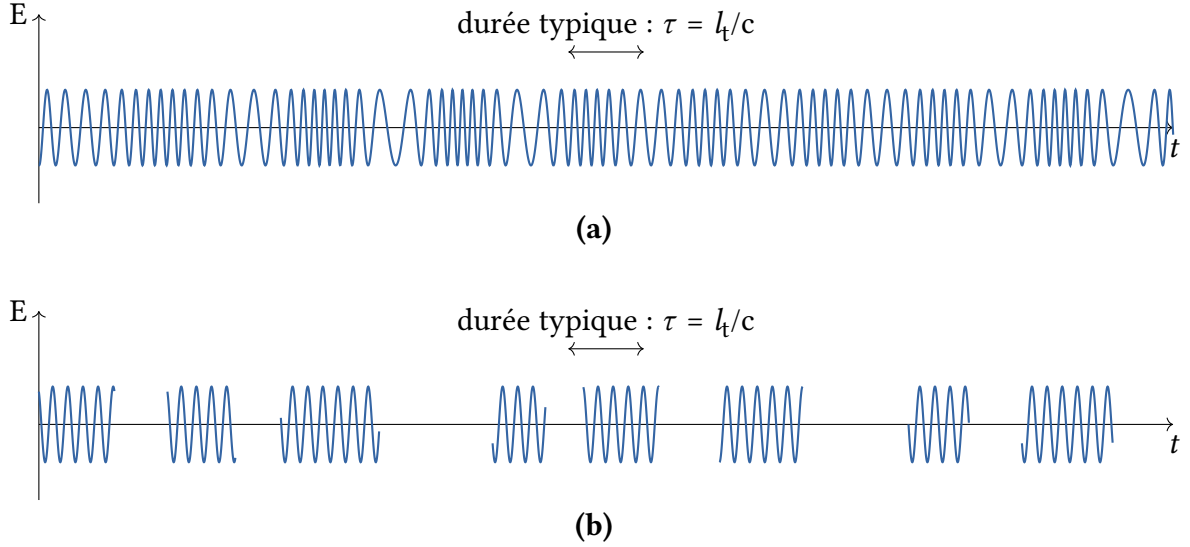


FIGURE 2.2 – Deux modèles plus raffinés de sources monochromatiques : (a) La fréquence instantanée de l’onde possède une composante aléatoire dont les variations typiques sont d’une durée τ . (b) Modèle des trains d’ondes : on modélise une source monochromatique par une succession de paquets d’ondes de durée finie possédant chacun une phase aléatoire.

déphasage entre les deux ondes au point M s’écrit maintenant :

$$\varphi_M(t) = \varphi_S(t - (SM)_2/c) - \varphi_S(t - (SM)_1/c) + 2\pi \frac{\delta}{\lambda_0} \quad (2.2.2)$$

où $\delta = (SM)_2 - (SM)_1$ est la différence de marche. Les temps de parcours $(SM)_1/c$ et $(SM)_2/c$ sont introduits pour tenir compte du fait que la phase de la source émettrice a changé durant le temps de parcours des chemins optiques. Si $(SM)_1 = (SM)_2$, alors $\varphi_M(t) = 0$ est bien indépendante du temps, et on a bien une interférence constructive. En revanche, pour $\delta \neq 0$, φ dépend à priori du temps.

Pour une source quasi-monochromatique, $\varphi_S(t)$ est une fonction aléatoire qui varie lentement, avec un temps caractéristique τ , le même que nous avons utilisé précédemment. Ainsi, pour des temps $t \ll \tau$, on peut considérer que $\varphi_S(t) = \text{cte}$. Dans notre cas, on pourra considérer φ_S constante si la différence de temps de parcours est très petite devant τ :

$$\frac{\delta}{c} \ll \tau \quad (2.2.3)$$

On appelle *longueur de cohérence temporelle* la grandeur $l_t = c\tau$ le chemin optique maximal permettant d’obtenir une figure d’interférence. Si la différence de marche entre deux trajets optiques issus de la même source est plus grande que la longueur de cohérence temporelle l_t , alors les deux ondes sont incohérentes et on n’obtient plus de figure d’interférence.

Cohérence spatiale Nous avons jusqu'à présent uniquement considéré des sources ponctuelles. En pratique, une source lumineuse possède toujours une extension spatiale non nulle. Par exemple, la lumière émise par un filament est issue des différents points de ce filament. Les ondes lumineuses émises par chacun de ces points n'ont pas de raisons d'avoir une relation de phase, et ces ondes peuvent être considérées comme incohérentes. De la même manière que pour la cohérence temporelle, on définit une *longueur de cohérence spatiale* l_s qui représente la taille maximale d'une source permettant d'obtenir des interférences. Cette longueur de cohérence spatiale dépend de la source. En pratique, il suffit de placer un trou ou une fente de petite dimension (\sim mm) après une lampe spectrale pour obtenir une source spatialement cohérente avec une lampe spectrale de TP. La figure 2.3 représente des exemples de fronts d'onde dans différents cas de cohérence spatiale.

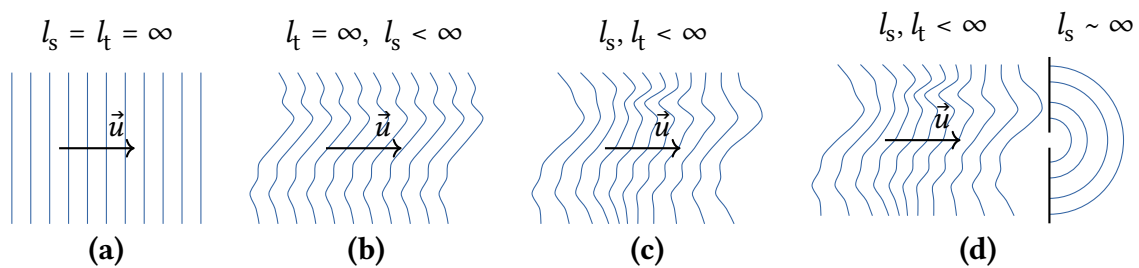


FIGURE 2.3 – Exemples de fronts d'ondes dans des cas de cohérences spatiales différents. En (a) et (b), la longueur de cohérence temporelle est infinie, mais la longueur de cohérence spatiale est finie pour (b). Dans (c), la source est spatialement et temporellement incohérente. (d) un trou ou une fente permet de retrouver une cohérence spatiale, mais ne change pas la cohérence temporelle.

2.3 Exemples classiques

Maintenant que les concepts principaux des interférences ont été présentés, nous allons les utiliser sur deux exemples classiques qui font intervenir deux types de division d'onde : la division de front d'onde avec les miroirs de Fresnel, et la division d'amplitude avec la lame d'air.

Diviseur de front d'onde : miroirs de Fresnel Le dispositif des miroirs de Fresnel est composé de deux miroirs M_1 et M_2 formant un petit angle α , comme représenté en figure 2.4 (a). Une partie de l'onde lumineuse issue d'une source S se réfléchit sur M_1 et une autre partie se réfléchit sur M_2 . On réalise ainsi une *division du front d'onde*. L'onde réfléchi par le miroir M_1 semble provenir de la *source-image* S_1 , et celle réfléchi par M_2 semble provenir de la source-image S_2 . Ces deux sources-images correspondent aux conjugués (au sens de l'optique géométrique vue en 1^{re} année) de S par M_1 et M_2 .

Les miroirs de Fresnel étant plongés dans l'air, la différence de marche au point M s'exprime :

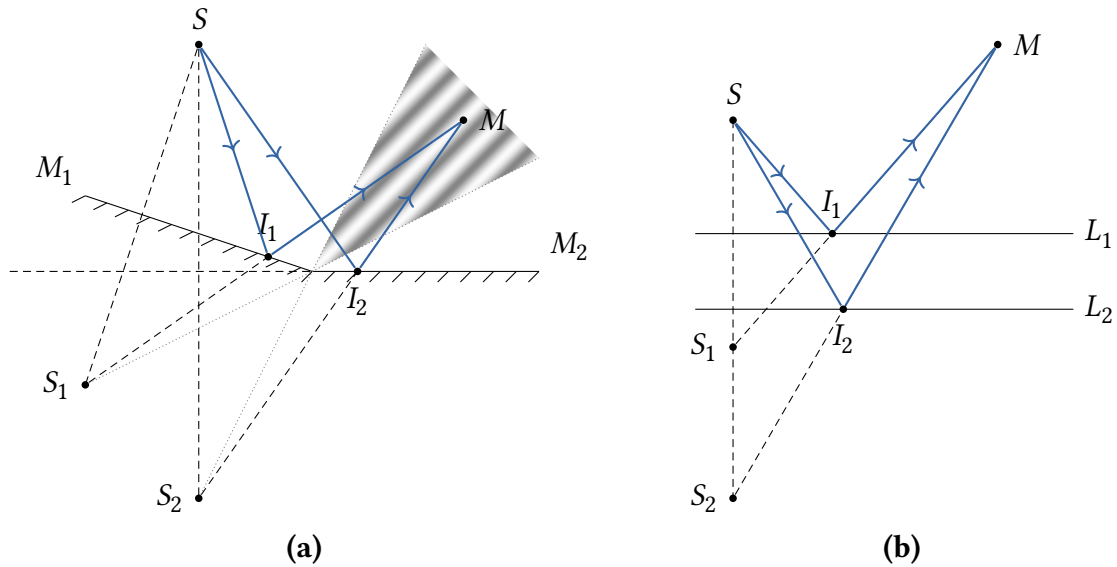


FIGURE 2.4 – (a) Miroirs de Fresnel : les deux miroirs M_1 et M_2 créent deux sources S_1 et S_2 , images de S . Ces deux sources interfèrent dans la zone hachurée. (b) lame d'air : deux lames semi-réfléchissantes créent deux sources-images S_1 et S_2 qui interfèrent au point M .

Calcul de la différence de marche

Ainsi, tout se passe comme si les ondes qui interfèrent au point M avaient été émises par les sources-images S_1 et S_2 , répliques fictives d'une même source S .

Diviseur d'amplitude : lame d'air Une *lame d'air* est constituée de deux lames minces L_1 et L_2 semi-réfléchissantes, parallèles et distantes de e (voir figure 2.4 (b)). Chaque lame donne naissance à une onde transmise et à une onde réfléchie, en *divisant l'amplitude* de l'onde initiale. Ce faisant, les deux lames créent deux sources images S_1 et S_2 , et comme dans le dispositif des miroirs de Fresnel, la différence de marche s'écrit :

$$\delta_M = (SM)_2 - (SM)_1 = SI_2 + I_2M - SI_1 - I_1M \quad (2.3.1)$$

$$= S_2I_2 + I_2M - S_1I_1 - I_1M = S_2M - S_1M \quad (2.3.2)$$

On retiendra donc que tout se passe comme si *les ondes qui interfèrent en M avaient été émises par les sources-images S_1 et S_2* .

2.4 Interférences de deux sources ponctuelles

Nous avons vu que l'on peut résumer les problèmes d'interférences à un calcul de différence de marche entre deux sources S_1 et S_2 monochromatiques et cohérentes entre elles.

On appelle a la distance à ces deux sources et on cherche les interférences obtenues dans les plans perpendiculaire et parallèle à S_1S_2 . La figure 2.5 schématise l'ensemble de ces notations, et on considère que le système est plongé dans l'air ($n = \text{cte} = 1$) et que les intensités des deux sources sont égales.

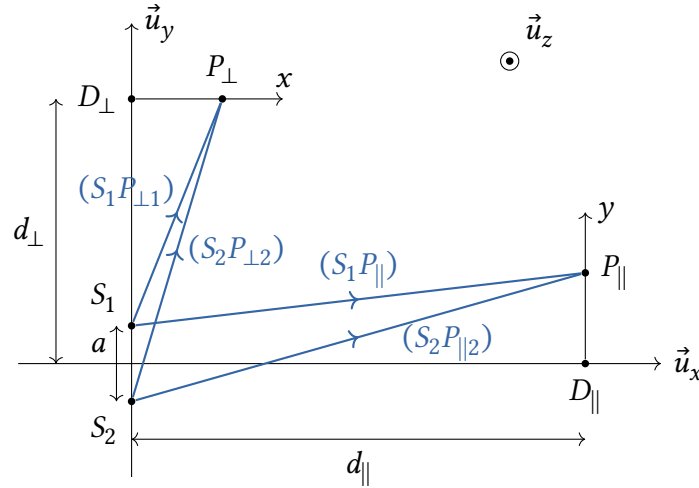


FIGURE 2.5 – Schéma du système d'étude des interférences : on observe les interférences de deux sources S_1 et S_2 , distantes de a , dans les plans $(\overrightarrow{D_{||}y}, \overrightarrow{D_{||}z})$ et $(\overrightarrow{D_{\perp}x}, \overrightarrow{D_{\perp}z})$.

Observation dans un plan parallèle à S_1S_2 On considère la situation de la figure 2.5 où on place un écran dans le plan $(\overrightarrow{D_{||}y}, \overrightarrow{D_{||}z})$, soit dans le plan parallèle à S_1S_2 . Le point $P_{||}$ défini par ses coordonnées $(x = d_{||}, y, z)$ est un point quelconque de l'écran, et nous allons chercher à exprimer la différence de marche $\delta_p = (S_2P) - (S_1P)$ en fonction des données du problème (et on simplifie la notation en enlevant les $||$).

Calcul du chemin optique

Nous allons considérer dans la suite que l'écran est placé très loin des sources, de telle sorte que $d \gg a$. On considère également que les coordonnées sur l'écran y et z sont elles aussi petites comparées à d . Nous ferons donc un développement limité à l'ordre 1 en a/d :

Calcul approché de la différence de marche

Par conséquent, la différence de marche δ_p vaut :

$$\delta_p = (S_2P) - (S_1P) \approx \frac{ay}{d} \quad (2.4.1)$$

En utilisant l'équation 2.1.13, on obtient l'intensité sur l'écran au point P :

$$I(P) = I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi ay}{\lambda_0 d} \right) \quad (2.4.2)$$

Ainsi l'intensité lumineuse varie périodiquement entre 0 et $2I_0$ avec y (donc selon la direction \vec{u}_y). Comme le résultat ne dépend pas de z , les franges d'interférence obtenues sont parallèles. Une représentation de ce qu'on obtiendrait sur l'écran est proposée en figure 2.6 (a). On obtient l'intensité maximale sur les franges brillantes, pour :

$$y_k = k \frac{\lambda_0 d}{a}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.4.3)$$

On appelle *interfrange* la distance $i = y_{k+1} - y_k$ entre deux franges brillantes (ou sombres) :

$$i = y_{k+1} - y_k = \frac{\lambda d}{a} \quad (2.4.4)$$

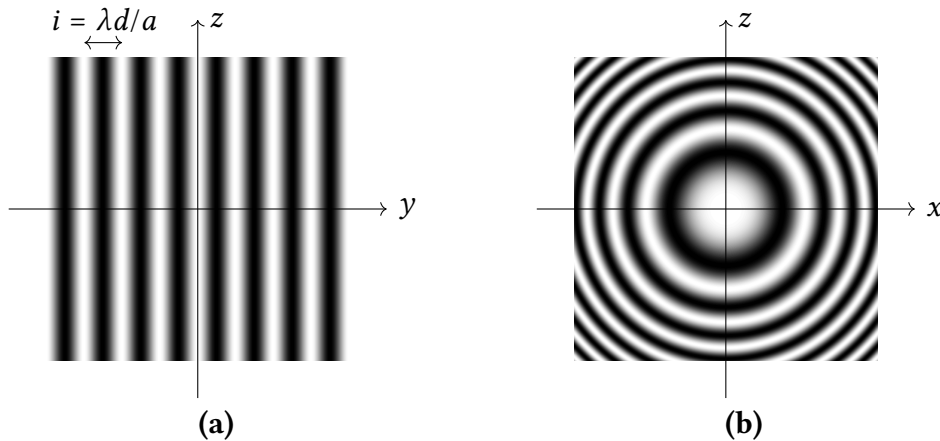


FIGURE 2.6 – Exemples de figures d'interférences : (a) franges parallèles obtenues dans le plan parallèle à S_1S_2 . (b) Franges d'égales inclinaisons, ou anneaux d'interférence obtenues dans un plan perpendiculaires à S_1S_2 .

Observation dans un plan perpendiculaire à S_1S_2 On considère cette fois ci la situation de la figure 2.5 où on place un écran dans le plan $(\overrightarrow{D_\perp x}, \overrightarrow{D_\perp z})$, soit dans le plan perpendiculaire à S_1S_2 . De la même manière que précédemment, on cherche à exprimer les chemins optiques (S_1P_\perp) et (S_2P_\perp) :

Calcul des chemins optiques

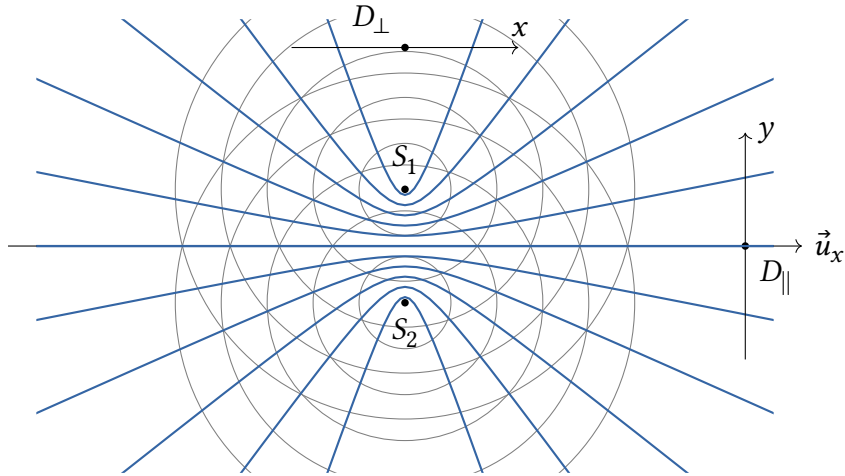


FIGURE 2.7 – Cas général : les franges d’interférences forment des hyperboloïdes de révolution dont les foyers sont S_1 et S_2 . Les cas asymptotiques où les écrans sont positionnés loin des sources parallèlement ou perpendiculairement à celles-ci donnent bien les résultats détaillés dans les sections précédentes.

Par conséquent, la différence de marche δ_p vaut :

$$\delta_p = (S_2P) - (S_1P) \approx a \left(1 - \frac{\rho^2}{2d^2} \right) \quad (2.4.5)$$

Cette fois ci, les franges brillantes sont des anneaux concentriques de centre D_\perp et de rayons :

$$\rho_k = \sqrt{2}d \sqrt{1 - k \frac{\lambda_0}{a}} \quad (2.4.6)$$

On parle de franges d’égales inclinaisons car chaque frange d’interférence correspond à un angle d’incidence sur l’écran donné. La figure 2.6 (b) représente ce qui serait visible sur l’écran placé dans le plan $(\overrightarrow{D_\perp x}, \overrightarrow{D_\perp z})$.

Généralisation Dans le cas général, l’ensemble des points de même intensité lumineuse est défini par la condition :

$$(S_2P) - (S_1P) = \text{cte} \quad (2.4.7)$$

Ces surfaces sont des hyperboloïdes de révolution de foyers S_1 et S_2 . La figure 2.7 en représente une coupe dans le plan $z = 0$. On retrouve les cas asymptotiques étudiés précédemment, avec la projection sur le plan perpendiculaire à S_1S_2 donnant des anneaux d’interférence, et la projection sur le plan parallèle à S_1S_2 donnant des franges parallèles.

2.5 Interféromètre de Michelson

L'*interféromètre de Michelson* est un dispositif optique produisant des interférences par division d'amplitude, grâce à une lame semi-réfléchissante. Il a joué un rôle crucial dans l'histoire de la physique puisque c'est grâce à ce dispositif que Michelson et Morley ont montré que la vitesse de la lumière c était constante quel que soit le référentiel, conduisant quelques années plus tard à la théorie de la relativité restreinte. De nos jours, il continue à être un dispositif extrêmement utile, en particulier utilisé pour la récente détection d'ondes gravitationnelles.

Description L'interféromètre de Michelson est composé de deux miroirs M_1 et M_2 et d'une lame semi-réfléchissante S_p appelée *séparatrice* : une onde lumineuse issue d'une source ponctuelle S arrive d'abord sur la séparatrice, donnant ainsi naissance à deux ondes d'intensités voisines. L'onde (1) se réfléchit sur la séparatrice, puis sur le miroir M_1 avant de traverser la séparatrice en direction de la zone d'observation : on parle du premier *bras* de l'interféromètre. L'onde (2) commence par traverser la séparatrice, se réfléchit sur le miroir M_2 puis est réfléchi par la séparatrice afin d'aboutir dans la même zone d'observation que l'onde (1) ; il s'agit du deuxième *bras*. Un schéma de l'interféromètre de Michelson avec les trajets des ondes lumineuses est présenté en figure 2.8.

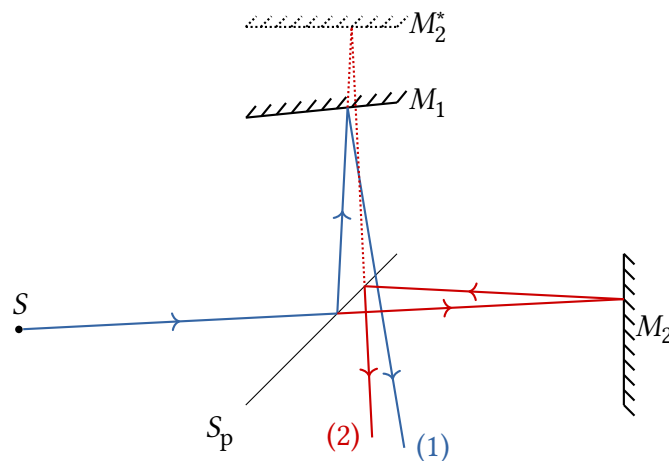


FIGURE 2.8 – Schéma de principe de l'interféromètre de Michelson : l'onde issue de S est divisée en amplitude par la lame séparatrice S_p . La partie (1) de l'onde réfléchi par la séparatrice est ensuite réfléchi par le miroir M_1 pour arriver dans la zone d'observation. L'onde (2) qui traverse la séparatrice est réfléchi par M_2 puis par la séparatrice pour aboutir dans la même zone d'observation. On introduit le miroir équivalent M_2^* correspondant au symétrique de M_2 par la séparatrice S_p .

Nous supposons la séparatrice infiniment fine de telle sorte qu'elle ne modifie pas les rayons lumineux en transmission et agit comme un miroir en réflexion.

Schéma équivalent Le fonctionnement d'un Michelson s'interprète facilement si on remplace l'un des miroirs par son symétrique par rapport à la séparatrice. On considère ainsi le miroir virtuel M_2^* , symétrique du miroir M_2 par rapport à la séparatrice S_p . Cette symétrie ne change pas les longueurs, et les différences de marches entre les deux bras du Michelson sont ainsi conservées, ce qui nous permet de calculer les figures d'interférence plus simplement. Le miroir M_2^* est représenté en pointillés sur la figure 2.8.

Utilisation en lame d'air Dans cette configuration, les miroirs M_1 et M_2 sont orthogonaux entre eux, et M_2^* est donc parallèle à M_1 ; on dit alors que l'interféromètre est utilisé en *lame d'air*.

On utilisera les notations de la figure 2.9 (a) dans la suite. On introduit en particulier la distance e entre les miroirs M_1 et M_2^* et i l'angle d'incidence d'un rayon sur le dispositif.

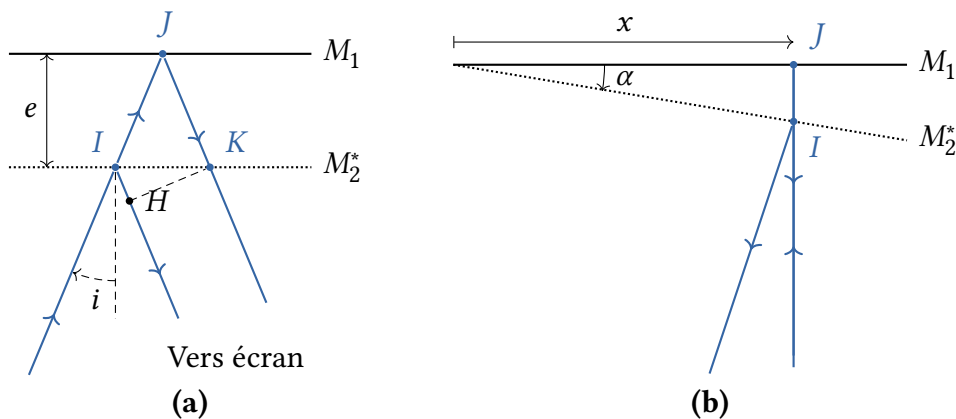


FIGURE 2.9 – Équivalences de l'interféromètre de Michelson. (a) Configuration équivalente en lame d'air. (b) Configuration équivalente en coin d'air.

Q 2.5 - 1 En utilisant la figure 2.9 (a), montrez que la différence de marche δ entre les ondes réfléchies par M_1 et M_2^* vaut :

$$\delta = 2e \cos i \quad (2.5.1)$$

Justifier que l'on parle de *franges d'égale inclinaison*.

On constate expérimentalement que dans cette configuration, les franges sont brouillées presque partout dans l'espace. La figure d'interférence n'est nette qu'à l'infini, on dit que les franges sont localisées à l'infini.

Q 2.5 - 2 On remarque sur la figure 2.9 (a) que les rayons sortant du dispositifs sont parallèles. Proposez un montage d'optique géométrique permettant d'obtenir la figure d'interférence nette sur un écran. Quel sera le rayon des anneaux brillants obtenus sur l'écran ?

Utilisation en coin d'air On suppose dans ce paragraphe que le miroir M_1 et l'image M_2^* du miroir M_2 par rapport à la séparatrice font entre eux un petit angle α . On dit alors que l'interféromètre est utilisé en *coin d'air*.

Q 2.5 - 3 Déterminez (qualitativement) les positions des sources-images S_1 et S_2 dans ce cas. En supposant que la différence de distance entre les miroirs et la séparatrice est faible comparé aux autres dimensions du problème, décrire la figure d'interférence attendue.

Q 2.5 - 4 En utilisant les considérations des questions précédentes, justifiez que l'interféromètre en configuration coin d'air est équivalent au schéma de la figure 2.9 (b). En supposant α petit, exprimer la différence de marche δ entre les trajets (1) et (2).

On constate expérimentalement que les interférences d'un interféromètre de Michelson utilisé en coin d'air ne sont visibles que proche des miroirs. Les franges sont donc localisées et on dit qu'elles sont *peintes sur la lame*.

Q 2.5 - 5 À partir de l'expression de la différence de marche, calculer l'interfrange de la figure d'interférence obtenue. Quelle est l'allure des franges ?

2.6 Interférences en lumière polychromatique

L'objet de cette section est d'étudier les phénomènes d'interférences avec des sources polychromatiques, c'est-à-dire émettant à plusieurs fréquences. Nous avons vu que des ondes vibrant à des pulsations différentes ω_1 et ω_2 n'étaient pas cohérentes et n'interféraient donc pas. Si ces ondes sont émises depuis la même source S , on visualise tout de même la somme des différentes figures d'interférence.

Cas d'un doublet de longueur d'onde On considère la frange centrale d'une figure d'interférence de l'interféromètre de Michelson en configuration de lame d'air.

Q 2.6 - 1 Donner l'expression de l'intensité lumineuse de cette frange centrale dans le cas d'une source unique S de pulsation ω_1 en fonction de l'épaisseur e de la lame d'air équivalente, de l'intensité de l'onde émise I_{01} et de ω_1 .

Q 2.6 - 2 On suppose maintenant que la source S émet deux ondes de pulsations ω_1 et ω_2 , et d'intensités identiques ($I_{01} = I_{02} = I_0/2$). Ces 2 ondes étant incohérentes entre elles, exprimer l'intensité totale au centre de l'écran. On mettra ce résultat sous la forme suivante :

$$I = I_0(1 + V \cos(\omega\delta/c)) \quad (2.6.1)$$

où on donnera les expressions de V , ω et δ en fonction des données du problème.

Ainsi, si le terme de visibilité V introduit n'est pas identiquement nul, et des franges d'interférence sont donc visibles.

Q 2.6 - 3 Donner l'allure de la courbe de V en fonction de l'épaisseur e . Lorsque le contraste des franges devient nul, on parle de *brouillage* des franges d'interférence. De combien faut-il faire varier e pour passer d'un brouillage à un autre ?

Q 2.6 - 4 Application numérique : les deux raies orange d'une lampe sodium ont pour longueurs d'ondes $(589,0 \pm 0,3)$ nm. En déduire la longueur de chariotage Δe permettant de passer d'un brouillage à un autre.

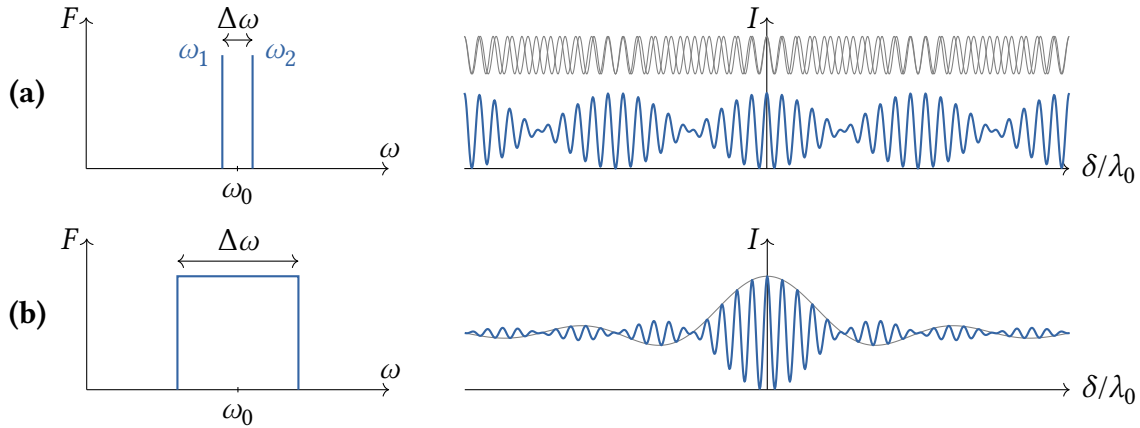


FIGURE 2.10 – Allure des interférences obtenues dans le cas d'un doublet de longueurs d'ondes (a) et dans le cas d'une source à profil rectangulaire (b).

Densité spectrale Dans le cas d'une source polychromatique, on définit sa *densité spectrale* comme l'intensité émise par les différentes composantes spectrales de la source : ainsi, l'intensité lumineuse $dI_0(\omega)$ émise entre ω et $\omega + d\omega$ peut s'écrire :

$$dI_0(\omega) = F(\omega) d\omega \quad (2.6.2)$$

La fonction $F(\omega)$ est appelée *densité spectrale* de la source et peut prendre différentes formes. Par exemple, la densité spectrale de la source émettant deux longueurs d'onde étudiée précédemment est nulle partout sauf pour $\omega = \omega_1$ et $\omega = \omega_2$ (voir figure 2.10 (a)). Certaines sources dites *blanches* émettent un continuum large de fréquences, et leur densité spectrale est donc une fonction non nulle sur un large intervalle de pulsations.

Nous notons l'intensité émise par la source infinitésimale centrée autour de ω $dI_0(\omega)$ car elle est également infiniment petite. L'intensité totale de la source I_0 peut être calculée simplement en intégrant (sommant) les intensités de toutes ces sources :

$$I_0 = \int dI_0 = \int_0^\infty F(\omega) d\omega \quad (2.6.3)$$

Cas d'une source à profil rectangulaire Considérons une source dont la densité spectrale est une fonction carrée telle que :

$$F(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega < \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \\ F_0 & \text{si } \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} < \omega < \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \\ 0 & \text{si } \omega > \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \end{cases} \quad (2.6.4)$$

où ω_0 est la pulsation centrale et $\Delta\omega$ la *largeur spectrale* de la source. $F(\omega)$ est dessiné en figure 2.10.

Nous utilisons maintenant cette source dans un interféromètre quelconque qui introduit une différence de marche δ entre deux trajets optiques. Dans la limite où $d\omega$ tend vers zéro, nous pouvons décomposer la source en une infinité de sources monochromatiques géométriquement confondues, émettant entre ω et $\omega + d\omega$ avec une intensité $dI_0 = F(\omega) d\omega = F_0 d\omega$. Pour chacune de ces sources, nous obtenons une figure d'interférence donnée par :

$$dI = F_0 \left(1 + \cos \left(\frac{\omega\delta}{c} \right) \right) = F_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda} \right) \right) \quad (2.6.5)$$

Les ondes de pulsations différentes sont incohérentes, on doit donc sommer leurs *intensités* pour obtenir l'intensité totale :

Calcul de l'intensité totale

On voit à nouveau apparaître une formule du type :

$$1 + V(\delta) \cos(\omega_0\delta/c) \quad \text{avec} \quad V(\delta) = \text{sinc}(\Delta\omega\delta/(2c)) \quad (2.6.6)$$

où on a utilisé la fonction sinus-cardinal $\text{sinc}(u) = \sin(u)/u$. Cette fonction présente des oscillations dont l'amplitude tend vers 0 pour $u \rightarrow \pm\infty$. On notera en particulier qu'elle est nulle pour $u = \pm\pi$. Ainsi, on obtient un premier brouillage des franges d'interférence pour $\delta_m = 2\pi c/\Delta\omega$. La figure d'interférence obtenue est représentée en figure 2.10 (b) et on note que le contraste des franges diminue lorsqu'on s'éloigne de $\delta = 0$. Au delà de δ_m , le contraste augmente à nouveau mais sans atteindre de valeurs significatives, de telle sorte qu'on peut considérer que les franges sont brouillées dès que la différence de marche δ dépasse δ_m . Ce résultat et la condition de visibilité des franges $|\delta| < \delta_m$ sont à rapprocher de la condition $|\delta| < l_t$ vue dans la section 2.2 sur la cohérence temporelle. En identifiant les deux contraintes, on obtient une expression pour la longueur de cohérence temporelle :

$$l_t = \delta_m = \frac{2\pi c}{\Delta\omega} = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda} \quad (2.6.7)$$

On retiendra de cette étude qu'un interféromètre éclairé par une raie de largeur spectrale $\Delta\lambda$ non nulle produira des interférences visibles tant que la différence de marche δ est inférieure à la longueur de cohérence l_t .

Dans une certaine mesure, on peut considérer que le spectre d'une source blanche telle qu'une lampe à incandescence ou le soleil est assimilable à un profil rectangulaire. Pour une telle source, la largeur spectrale $\Delta\lambda$ est de l'ordre de 400 nm et $\lambda_0 \sim 600$ nm ; la longueur de cohérence est donc de l'ordre du micron. L'intensité lumineuse deviendra donc uniforme très rapidement, dès que l'ordre d'interférence δ/λ_0 dépassera quelques unités. Afin d'observer des interférences en lumière blanche, il faudra donc être très proche du *contact optique*, c'est-à-dire proche de $\delta = 0$. En pratique, on observe des franges irisées, les *teintes de Newton* qui résultent de la somme des interférences décalées de chaque longueurs d'onde. Ces teintes

sont représentées en figure 2.11.

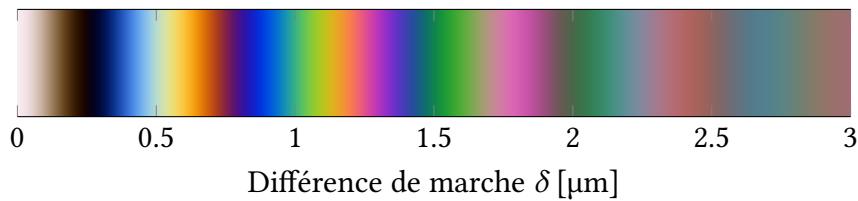


FIGURE 2.11 – Teintes de Newton : franges colorées apparaissant près du contact optique dans un interféromètre éclairé par une source blanche.

2.7 Fabry-Pérot

Le Fabry-Pérot est un autre dispositif interférentiel très largement utilisé. Il est constitué de deux lames semi-réfléchissantes parallèles identiques Σ_1 et Σ_2 séparées d'une distance e , comme dessiné en figure 2.12. Ces lames sont supposées infiniment fine, de coefficient de réflexion en intensité R proche de 1 et sans perte, de sorte que leur transmission T vaut $T = 1 - R$. Une réflexion sur une de ces lames s'accompagne d'un déphasage de π pour l'amplitude complexe, soit une multiplication par -1 .

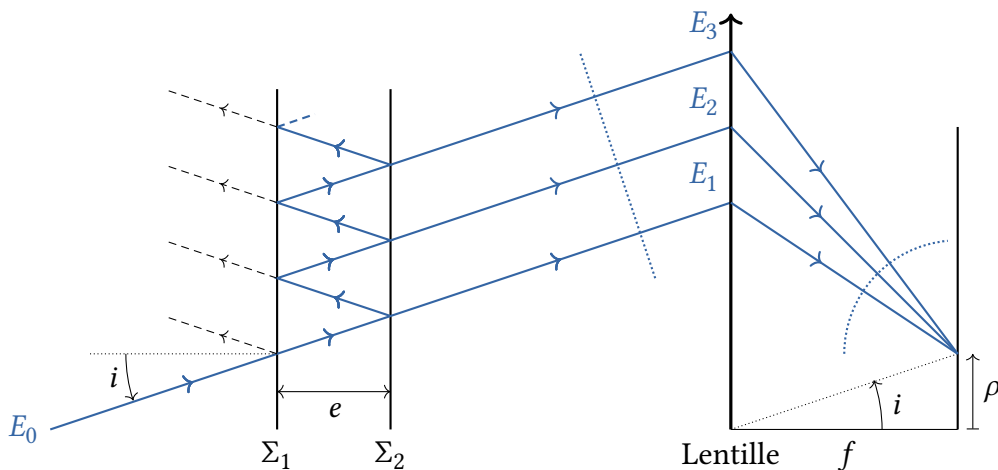


FIGURE 2.12 – Schéma de principe de l'interféromètre de Fabry-Pérot. La source monochromatique éclaire l'interféromètre avec un angle d'incidence i , et on observe les franges sur un écran situé dans le plan focal d'une lentille L .

Q 2.7 - 1 En préliminaire, on s'intéresse à une lame semi-réfléchissante unique Σ . À partir des coefficients de réflexion et de transmission défini précédemment, exprimer les amplitudes complexes d'une onde réfléchie E_r par cette lame semi-réfléchissante unique, ainsi que celle d'une onde transmise E_t . On exprimera ces quantités en fonction de R et de l'amplitude d'une onde incidente E_i .

On éclaire l'interféromètre avec une onde monochromatique d'amplitude $E_0 = \sqrt{I_0}$ et de longueur d'onde λ , émise par une source ponctuelle S et incidente sur Σ_1 avec un angle i . On cherche à observer la figure d'interférence sur un écran placé dans le plan focal d'une lentille L située après l'interféromètre.

Q 2.7 - 2 Déterminer l'amplitude complexe E_1 du premier faisceau transmis en fonction de R , E_0 , de la longueur d'onde λ et de la distance SE_1 .

Q 2.7 - 3 On pose $\varphi = 4\pi e \cos i / \lambda_0$. Donner l'expression de l'amplitude complexe E_2 de l'onde transmise suivante en fonction de l'amplitude E_1 , de R , et de φ . En déduire par récurrence l'expression générale des E_k .

Q 2.7 - 4 On admet que la série géométrique $\sum_{k=0}^N q^k$ pour $|q| < 1$ a pour limite $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1/(1 - q)$. Calculer l'expression de l'amplitude totale $E(i)$ sur l'écran.

Q 2.7 - 5 Montrer que l'intensité totale $I(M)$ peut s'écrire sous la forme :

$$I(M) = \frac{(1 - R)^2 I_0}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi} \quad (2.7.1)$$

Donner l'allure de la transmission $T = I(M)/I_0$ en fonction de φ . Quel est l'intérêt de ce dispositif?

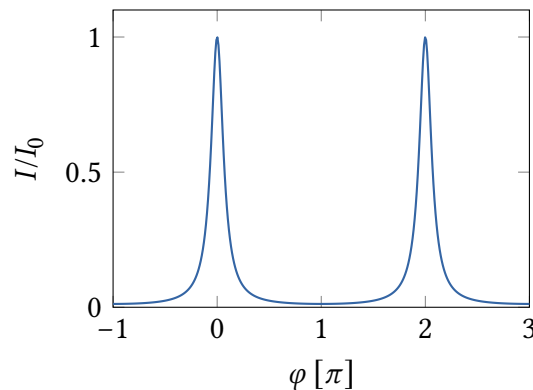


FIGURE 2.13 – Allure de la transmission de l'interféromètre de Fabry-Pérot.

Q 2.7 - 6 On appelle finesse le rapport $F = 2\pi/\Delta\varphi$ où $\Delta\varphi$ est le déphasage pour lequel l'intensité est égale à la moitié de sa valeur maximale. Calculer F .

3 Diffraction

Dans la section précédente, nous avons décrit la lumière comme une onde, ce qui nous a permis d'expliquer le phénomène d'interférences. Nous avons cependant toujours considéré que ces ondes suivaient un trajet rectiligne (dans un milieu d'indice homogène), ce qui n'est pas exactement en accord avec notre expériences des ondes en général : nous entendons distinctement un son émis derrière un mur, et des vagues atteignent la côte même quand elle est protégée, comme en témoigne la figure 3.1.

Ce phénomène se produit également pour les ondes lumineuses, mais ne devient visible que lorsque la lumière est bloquée ou modifiée par des obstacles de petites dimensions, de l'ordre de la longueur d'onde. La loi de la propagation rectiligne est alors violée, le principe de base de l'optique géométrique (la lumière peut être modélisée par des rayons lumineux) n'est plus valable, et l'énergie de l'onde se répartit dans tout l'espace. On parle de *diffraction*.

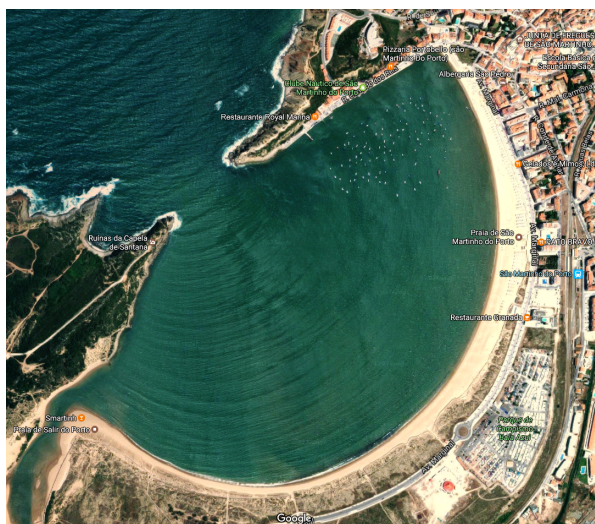


FIGURE 3.1 – Exemple de diffraction de vagues.

Dans ce chapitre, nous allons étudier ce phénomène de diffraction en utilisant le principe de Huygens-Fresnel, et voir quelques exemples où la diffraction joue un rôle primordial.

3.1 Principe de Huygens-Fresnel et diffraction de Fraunhofer

Les effets de la diffraction peuvent à priori être calculés à partir des équations de Maxwell. Cela est néanmoins très fastidieux, et on préfère utiliser une méthode approchée, celle d'Huygens-Fresnel.

3.1.1 Principe d'Huygens-Fresnel

On considère une ouverture plane Σ éclairée par une source ponctuelle S monochromatique à la longueur d'onde λ . On divise cette surface Σ en petits éléments de surface $d\sigma(P)$ centrés sur un point quelconque P . On cherche à déterminer l'intensité lumineuse reçue en un point M situé sur un écran éloigné de Σ . On se reportera à la figure 3.2 pour visualiser ces définitions. Le principe de Huygens-Fresnel postule que :

1. Chaque élément de surface $d\sigma(P)$ se comporte comme une source ponctuelle fictive (ou *secondaire*), émettant une *ondelette* dont l'amplitude complexe instantanée Ψ_P est proportionnelle à celle $\Psi_S(P, t)$ de l'onde émise par S arrivant au point P , et à l'élément de surface $d\sigma(P)$.
2. Ces sources fictives d'ondelettes sont *cohérentes* entre elles.

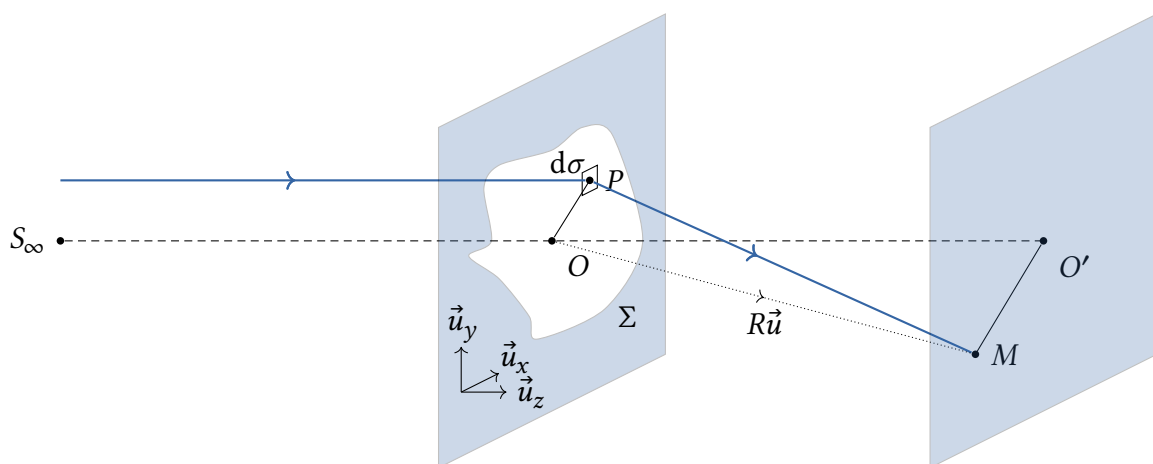


FIGURE 3.2 – Définitions et notations utilisées pour l'étude de la diffraction. L'onde émise par S arrive sur la surface Σ , où chaque élément de surface $d\sigma$ centré sur P joue le rôle d'émetteur secondaire. Ces sources secondaires émettent de façon cohérente et interfèrent au point M .

Nous allons à présent chercher à exprimer ce principe sous forme mathématique. On considère que le système est plongé dans l'air, milieu homogène d'indice $n = 1$. D'après le principe de Huygens-Fresnel, l'élément de surface $d\sigma(P)$ émet une nouvelle onde quand il est éclairé par une onde incidente plane d'amplitude Ψ_0 . Dans le cas où M est à une distance finie de la

surface Σ , les ondes sont *sphériques*, et l'amplitude complexe $d\Psi_P(M, t)$ de cette onde émise en P et reçue en M s'écrit :

$$d\Psi_P(M, t) = K\Psi_0 \frac{\exp(i\omega t - ikPM)}{PM} d\sigma(P) \quad (3.1.1)$$

où $k = 2\pi/\lambda$ et K est une constante de proportionnalité dont le module est homogène à l'inverse d'une longueur. Ces ondes étant cohérentes (d'après la deuxième partie du principe d'Huygens-Fresnel), l'amplitude totale de l'onde reçue en M est simplement la somme de toutes ces composantes :

$$\Psi(M, t) = \iint_{\Sigma} d\Psi_P(M, t) \quad (3.1.2)$$

$$= \iint_{\Sigma} K \frac{\Psi_0 \exp(i\omega t - ikPM)}{PM} d\sigma(P) \quad (3.1.3)$$

En simplifiant par $\exp(i\omega t)$, on obtient l'amplitude complexe :

$$\Psi(M) = \iint_{\Sigma} K \frac{\Psi_0}{PM} e^{-ikPM} d\sigma(P) \quad (3.1.4)$$

Ainsi, on retiendra que la diffraction est le résultat d'un *phénomène d'interférences* entre les sources secondaires.

3.1.2 Diffraction de Fresnel

Le calcul de l'intégrale de l'équation 3.1.4 est généralement très complexe, et il nous faut faire quelques approximations pour nous en sortir. Dans l'approximation de Fresnel, on considère que

- La distance OM entre la surface diffractante Σ et l'écran est grande devant les dimensions de Σ : $R = OM \sim PM \gg OP$.
- Les angles considérés sont faibles. En particulier, l'angle $(\overrightarrow{OO'}, \overrightarrow{OM})$ est faible. C'est l'approximation *paraxiale*, l'observation se fait au voisinage du centre de l'écran O' .

Dans le cadre de ces approximations, on va pouvoir simplifier l'expression de la distance PM qui intervient dans 3.1.4 en faisant un développement limité à l'ordre 2 en PO/OM :

Calcul de PM dans l'approximation de Fresnel

En substituant cette expression dans 3.1.4, on obtient :

$$\Psi(M) = K \frac{\Psi_0 e^{-ikR}}{R} \iint_{\Sigma} \exp\left(-ik \frac{OP^2}{2R}\right) \exp(+ik\vec{u} \cdot \overrightarrow{OP}) d\sigma \quad (3.1.5)$$

Il est à noter qu'on a fait l'approximation $PM \simeq OM$ au dénominateur, c'est-à-dire une approximation d'ordre 0. Cette approximation se justifie car le terme de phase joue un rôle

majeur dans l'obtention de la figure d'interférence, beaucoup plus que les variations lentes introduites par la fonction inverse $1/x$. Cette relation constitue la relation fondamentale de la *diffraction dans l'approximation de Fresnel*, ou *diffraction à distance finie*. Le calcul de cette intégrale est là aussi généralement très difficile à mener à cause du terme quadratique. En pratique, on utilisera l'approximation de Fraunhofer, plus forte, pour calculer les distributions d'intensité lumineuse dues à la diffraction.

3.1.3 Diffraction de Fraunhofer

La diffraction de Fraunhofer correspond au cas particulier où le point d'observation se trouve à l'infini : $R = +\infty$. Cette approximation consiste donc à négliger le terme quadratique de Fresnel dans le développement limité de PM de l'équation 3.1.5. On fait donc effectivement un développement limité à l'ordre 0. L'équation 3.1.5 s'écrit alors :

$$\Psi(M) = K\Psi_0 e^{-ikR} \iint_{\Sigma} \exp(ik\vec{u} \cdot \vec{OP}) d\sigma \quad (3.1.6)$$

où on a traité la distance R au dénominateur comme une constante. Dans la pratique, seule la distribution relative de l'intensité va nous intéresser, et on omettra le facteur multiplicatif $K\Psi_0 \exp(-ikR)$. Dans des cas typiques de formes d'ouvertures bien choisies, cette expression est calculable ! C'est ce qu'on verra dans la section suivante sur plusieurs exemples.

Le terme quadratique de l'équation 3.1.5 que nous avons négligé peut s'écrire :

$$\exp\left(-ik\frac{OP^2}{2R}\right) \approx 1 - i\frac{kOP^2}{2R} \quad (3.1.7)$$

L'approximation de Fraunhofer consiste à négliger le dernier terme, c'est-à-dire à faire un développement limité à l'ordre 0. Le domaine de validité de cette approximation s'écrit donc :

$$kOP^2 \ll R \quad (3.1.8)$$

soit en faisant apparaître la longueur d'onde et d , la dimension typique de l'objet Σ :

$$\boxed{R \gg \frac{d^2}{\lambda}} \quad (3.1.9)$$

Cette condition est relativement délicate à réaliser, puisque pour une dimension typique de 1 mm et une longueur d'onde de 500 nm, on doit avoir $R \gg 2$ m. En éclairant l'objet avec un laser on pourra placer un écran à grande distance pour être dans cette approximation. Une méthode bien plus satisfaisante pour réaliser cette approximation consiste à observer la figure de diffraction en plaçant l'écran dans le plan focal d'une lentille convergente. Dans ce cas, l'observation est effectivement réalisée à l'infini, et on est bien dans les conditions de la diffraction de Fraunhofer.

3.1.4 Diffraction à l'infini par un diaphragme plan

On considère maintenant une onde plane issue d'une source S située à l'infini, se propageant dans la direction \vec{u}_0 et arrivant sur l'ouverture Σ . L'amplitude de l'onde issue de S arrivant au point P vaut :

$$\Psi_S(P) = \Psi_0 \exp(-i\vec{k}_0 \cdot \vec{SP}) = \Psi_0 \exp(-i\vec{k}_0 \cdot (\vec{SO} + \vec{OP})) \quad (3.1.10)$$

avec $\vec{k}_0 = k\vec{u}_0$ le vecteur d'onde de l'onde incidente. Le terme $\vec{k}_0 \cdot \vec{SO}$ est formellement infini, et correspond physiquement à la phase à l'origine de la source. Ce déphasage disparaîtra lors du calcul de l'intensité, et on peut donc d'ores et déjà l'omettre. D'après la formule de la diffraction de Fraunhofer 3.1.6, l'amplitude de l'onde diffractée au point M vaut :

$$\Psi(M) = K\Psi_0 \iint_{\Sigma} \exp [ik(\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \vec{OP}] d\sigma \quad (3.1.11)$$

On obtient donc une généralisation de la formule de diffraction de Fraunhofer dans le cas où l'angle d'incidence de la source sur l'ouverture n'est pas nul.

En notant $\vec{u}_0 (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, $\vec{u} (\alpha, \beta, \gamma)$, et $\vec{OP} (x, y, 0)$, on obtient :

$$\Psi(M) = K\Psi_0 \iint_{\Sigma} \exp [ik((\alpha - \alpha_0)x + (\beta - \beta_0)y)] d\sigma \quad (3.1.12)$$

3.1.5 Diffraction par un diaphragme de phase ou d'amplitude

On appelle *transparence complexe* $t(P)$ le rapport des amplitudes complexes juste avant et juste après le diaphragme, en deux points P^+ et P^- infiniment voisins de P . On a donc :

$$\Psi(P^+) = t(P)\Psi(P^-) \quad (3.1.13)$$

- Pour une *ouverture simple*, $t(P) = 0$ ou 1 .
- Pour un *diaphragme de phase*, $t(P)$ est un nombre complexe de module 1 :

$$t(P) = \exp i\varphi(P) \quad (3.1.14)$$

Expérimentalement, on peut réaliser un diaphragme de phase en utilisant une lame mince d'indice n dont l'épaisseur $e(P)$ est variable. Cette lame allonge le chemin optique, et déphase localement l'onde de $\varphi(P) = k(n - 1)e(P)$.

- Pour un *diaphragme d'amplitude*, $t(P)$ est réel positif. Un transparent ou un négatif photographique est un exemple de diaphragme d'amplitude.

L'amplitude diffractée par un diaphragme d'amplitude ou de phase est simplement donnée par la généralisation des relations vues précédemment :

$$\Psi(M) = K\Psi_0 \iint_{\Sigma} t(P) \exp [ik(\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \vec{OP}] d\sigma \quad (3.1.15)$$

C'est cette expression que nous utiliserons pour déterminer la figure de diffraction de la plupart des structures étudiées dans ce cours.

En prenant le cas particulier de la diffraction de Fraunhofer avec une onde incidente normale au diaphragme, et en se limitant à un problème unidimensionnel, nous obtenons :

$$\Psi(M) = K\Psi_0 \int_{\Sigma} t(P) \exp [ik\alpha x] dx \quad (3.1.16)$$

En supposant que $t(P) = 0$ lorsqu'on s'éloigne trop de l'axe optique, on peut étendre l'intégral entre $+\infty$ et $-\infty$:

$$\Psi(M) = K\Psi_0 \int_{-\infty}^{+\infty} t(P) \exp [ik\alpha x] dx \quad (3.1.17)$$

On remarque que cette expression est analogue à la transformée de Fourier de $t(P)$:

$$\hat{t}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \quad (3.1.18)$$

où on a effectué les changements $x \leftrightarrow \tau$ et $k\alpha \leftrightarrow \omega$. La diffraction est donc une méthode physique pour réaliser la *transformée de Fourier spatiale* d'un diaphragme.

3.1.6 Théorème de Babinet

On appelle *diaphragmes complémentaires* deux diaphragmes dont la somme des transparences est homogène et égale à 1 :

$$\forall P \quad t_1(P) + t_2(P) = 1 \quad (3.1.19)$$

Par exemple, un écran opaque percé d'un disque de rayon R et un écran transparent sur lequel on a noirci un disque de même rayon R constituent des diaphragmes complémentaires.

Le théorème de Babinet prévoit que *les figures de diffraction de Fraunhofer de deux écrans complémentaires sont identiques, sauf sur l'image géométrique S' de la source S .*

3.2 Applications

3.2.1 Ouverture rectangulaire

Nous cherchons ici à déterminer la figure de diffraction observée à l'infini après une ouverture rectangulaire de largeur a et de hauteur b . On note \vec{u}_0 ($\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$) le vecteur d'onde incident sur l'ouverture, \vec{u} (α, β, γ) un vecteur d'onde de sortie quelconque, et \overrightarrow{OP} ($x, y, 0$) la position d'un élément de surface de l'ouverture. Le système considéré est représenté en figure 3.3.

Q 3.2 - 1 Déterminer l'expression du produit scalaire $(\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \overrightarrow{OP}$ en fonction des coordonnées des différents vecteurs.

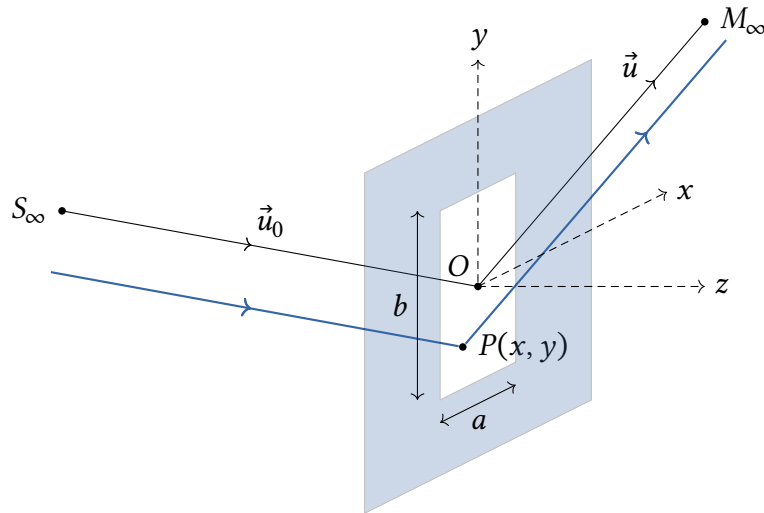


FIGURE 3.3 – Diffraction par une ouverture rectangulaire. L'onde incidente arrive selon le vecteur \vec{u}_0 , et on observe en un point M_∞ situé sur la direction \vec{u} .

Q 3.2 - 2 Calculer l'amplitude $\Psi(M)$ de l'onde diffractée dans la direction \vec{u} . On cherchera à mettre cette expression sous la forme $C \text{sinc}(m) \text{sinc}(n)$ où $\text{sinc}(m) = \sin(m)/m$ est la fonction sinus-cardinal.

Q 3.2 - 3 Montrer que l'expression de l'intensité au point M peut s'écrire :

$$I(M) = K^2 \Psi_0^2 a^2 b^2 \text{sinc}^2\left(\frac{k(\alpha - \alpha_0)a}{2}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{k(\beta - \beta_0)b}{2}\right) \quad (3.2.1)$$

Quelle est l'allure de la figure de diffraction ?

Nous retrouvons une nouvelle fois le carré de la fonction sinus-cardinal $\text{sinc}^2(u)$. Cette fonction présente un maximum absolu de 1 en $u = 0$. Elle s'annule pour $u = n\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}$, et passe par des maximums secondaires entre chaque zéros. On constate que ces maximums secondaires sont négligeables devant le maximum principal.

On peut tirer de cette étude plusieurs remarques physiques :

- L'intensité est maximale pour $\alpha = \alpha_0$, c'est-à-dire pour $\vec{u} = \vec{u}_0$ c'est-à-dire pour la direction *non déviée* par l'ouverture, c'est-à-dire respectant le principe de l'optique géométrique. La diffraction apporte donc une *correction* au principe de rayon lumineux, et de manière générale on dira que *l'intensité est maximale sur l'image géométrique de la source*.
- L'essentiel de l'énergie lumineuse est concentré dans la *frange centrale de diffraction*, centrée sur l'image géométrique S' de la source S et de demi-largeur angulaire :

$$|\alpha - \alpha_0| = \frac{\lambda}{a} \quad \text{et} \quad |\beta - \beta_0| = \frac{\lambda}{b} \quad (3.2.2)$$

Ainsi on retrouve les dimensions de l'ouverture diffractante dans la figure de diffraction.

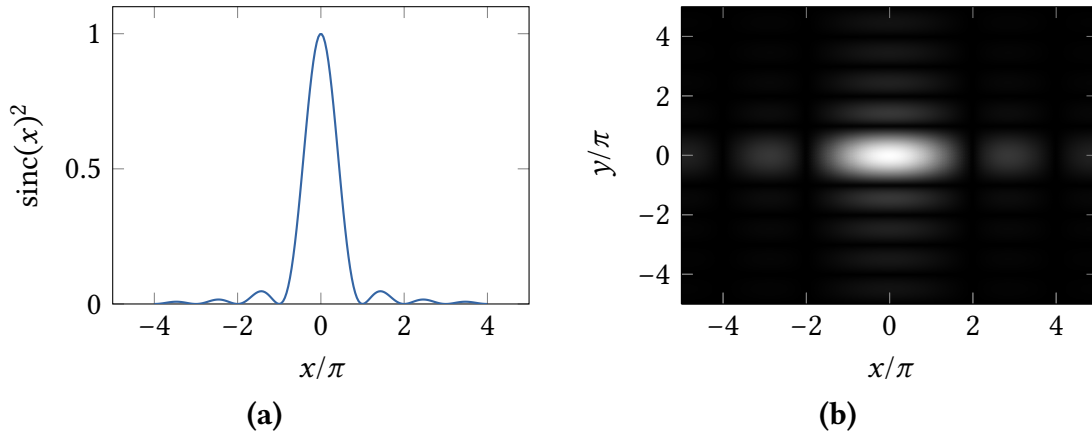


FIGURE 3.4 – (a) Allure de la fonction $\text{sinc } x^2$. (b) Allure de la figure de diffraction obtenue pour une ouverture rectangulaire telle que définie en figure 3.3. Attention, l'échelle de couleur a été choisie de manière à reproduire approximativement la sensation de l'œil humain.

Plus précisément, la largeur angulaire de diffraction est inversement proportionnelle à la dimension typique. De manière générale, on dira que *les dimensions caractéristiques d de l'ouverture diffractante interviennent dans la figure de diffraction par leurs inverses $1/d$* . Ce résultat est une conséquence directe du lien entre la diffraction et la transformée de Fourier que nous avons vu dans la section précédente.

- Les franges secondaires de diffraction sont deux fois moins larges que la frange centrale et beaucoup moins lumineuses.

3.2.2 Fente infinie

Le cas d'une fente fine et longue est un cas limite de celui de l'ouverture rectangulaire, où on prend $b \gg a$, c'est-à-dire que b peut être considéré comme infini. Dans ce cas, le terme $\text{sinc}(k(\beta - \beta_0)b/2)$ est nul pour tous β sauf pour $\beta = \beta_0$: la figure de diffraction est donc localisée dans la direction $S'x$. Nous retiendrons qu'une *fente fine ne diffracte notablement que dans une direction perpendiculaire à celle-ci*. Si en plus nous prenons un faisceau incident normal à la fente (donc $\alpha_0 = 0$), alors la distribution d'intensité vaut :

$$I(\alpha) = I_0 \text{sinc}^2\left(\frac{k\alpha a}{2}\right) = I_0 \text{sinc}^2\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}\right) \quad (3.2.3)$$

Si on fait l'observation dans le plan focal d'une lentille convergente de focale f' , on peut relier la composante α du vecteur \vec{u} à la coordonnée x' du point d'observation sur l'écran. On se réfèrera à la figure 3.5 pour un schéma du montage.

Q 3.2 - 4 En notant θ l'angle que fait le vecteur \vec{u} avec l'axe Oz , exprimer α en fonction de la coordonnée sur l'écran x' et de la longueur focale de la lentille f' .

Q 3.2 - 5 En déduire l'expression de l'intensité au point d'abscisse x' .

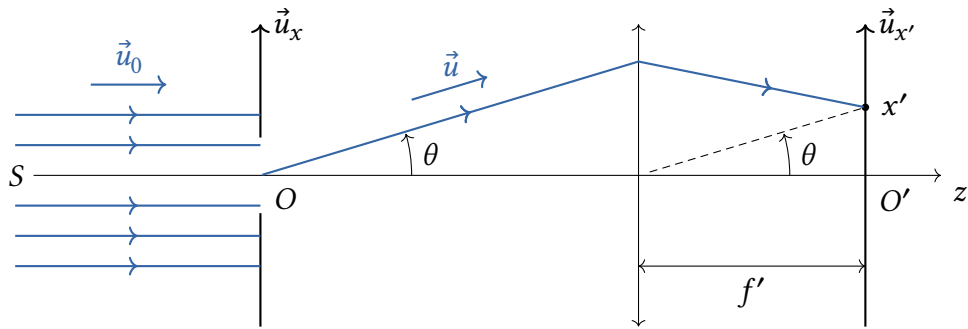
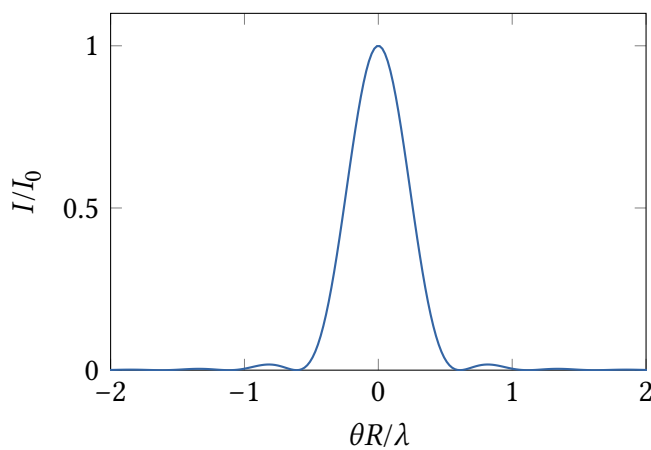


FIGURE 3.5 – Observation de la diffraction produite par une fente infinie dans le plan image d’une lentille convergente.

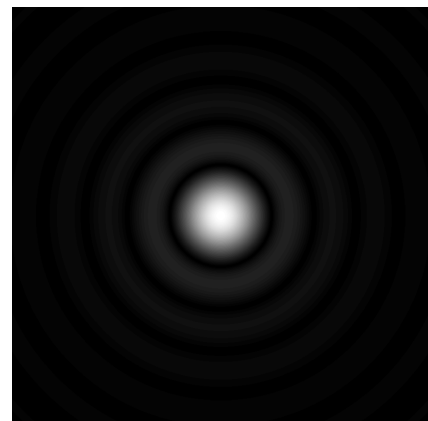
Q 3.2 - 6 Pour quelle valeur de x' l’intensité s’annule-t-elle pour la première fois ? Proposer une expérience permettant de mesurer le diamètre d’un cheveu.

L’allure de l’intensité observée est représentée en figure 3.4 (a).

3.2.3 Ouverture circulaire



(a)



(b)

FIGURE 3.6 – (a) Intensité diffractée par une ouverture circulaire en fonction de l’angle d’observation θ . (b) Allure de la figure de diffraction, ou figure d’Airy.

Le calcul de l’intensité diffractée par une ouverture circulaire de rayon R se fait en coordonnées polaires, et est plus délicat à mener. La physique reste cependant la même, et le résultat est similaire au cas de la fente rectangulaire : on observe des franges constituées d’anneaux centrés sur l’image géométrique S' de la source S . La forme de la figure diffractée est donnée

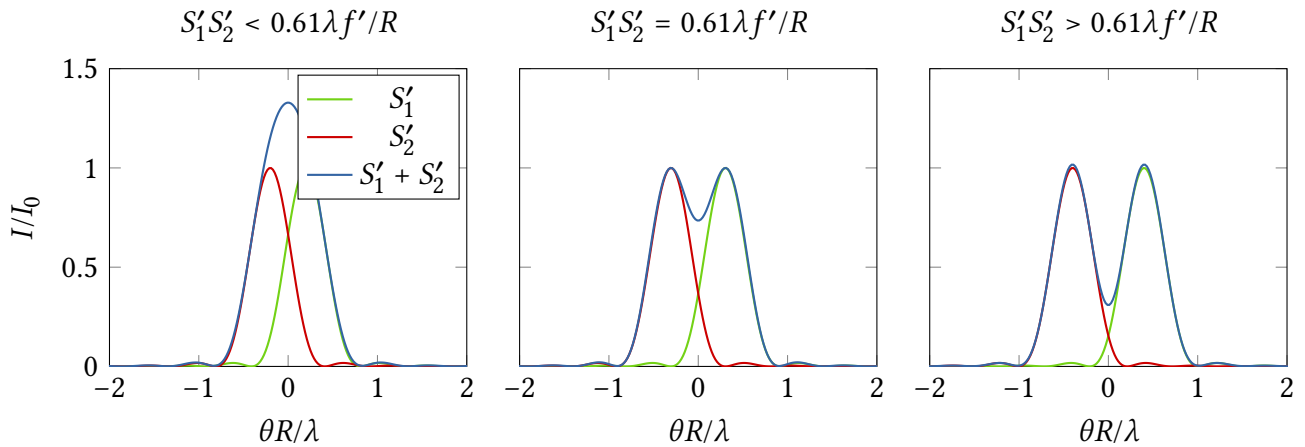


FIGURE 3.7 – Critère de Rayleigh : les taches-images de S'_1 et S'_2 sont considérées comme confondues si $S'_1 S'_2 < 0.61 \lambda f' / R$ (cas 1) et distinctes si $S'_1 S'_2 > 0.61 \lambda f' / R$ (cas 3). Le cas intermédiaire correspond à la limite du critère de Rayleigh.

par une *fonction de Bessel* dont l'allure est donnée en figure 3.6 :

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{2J_1(k\theta R)}{k\theta R} \right)^2 \quad (3.2.4)$$

où θ est l'angle d'observation et J_1 la première fonction de Bessel. On appelle cette figure de diffraction une *figure d'Airy*, composée d'une tache centrale, la *tache d'Airy*, et d'anneaux concentriques secondaires.

La fonction de Bessel $J_1(\pi x)$ s'annule une première fois pour $x = 1.22$, ce qui signifie que le rayon angulaire de la frange centrale vaut :

$$\theta_0 = 0,61 \frac{\lambda}{R} \quad (3.2.5)$$

Ainsi, l'essentiel de l'énergie lumineuse est localisé dans un cône de demi-angle au sommet θ_0 et d'axe le rayon lumineux incident. Là encore, la dimension de la tache de diffraction est proportionnelle à l'inverse de la taille de l'ouverture diffractante.

3.2.4 Rôle de la diffraction dans la formation des images

Dans un instrument d'optique (lunette, télescope, objectif, ...), les montures des lentilles ou miroirs constituent des ouvertures diffractantes. L'image d'un point source par l'instrument d'optique n'est donc pas rigoureusement ponctuelle (même sans aberrations) mais une tache de diffraction. Les lentilles et miroirs sont généralement circulaires, et cette tache est le plus souvent une tache d'Airy comme vu en 3.6. Le rayon de la tache-image est donc d'autant plus faible que le rayon des montures est grand, selon la formule 3.2.5. Ainsi, deux points objets rapprochés peuvent donner deux images trop proches pour être distinguées si la distance

entre ces images est du même ordre de grandeur que la taille de la tache de diffraction. Dans ce cas, les deux taches d'Airy empiètent en effet l'une sur l'autre, et on ne peut pas distinguer les deux images. On appelle *résolution* d'un instrument d'optique l'écart minimal entre deux points objets pour qu'on puisse les distinguer avec cet instrument. Quantitativement, on utilise le *critère de Rayleigh* qui dit que deux images S'_1 et S'_2 sont distinctes si le sommet de la tache de diffraction de l'une correspond au premier zéro de l'autre. Ce critère est illustré en figure 3.7. On trouve donc que les images sont considérées distinctes si :

$$S'_1 S'_2 \geq \frac{0.61 \lambda f'}{R} \quad (3.2.6)$$

où f' est la distance focale de l'instrument et R le rayon de la plus petite pupille.

3.2.5 Fentes d'Young

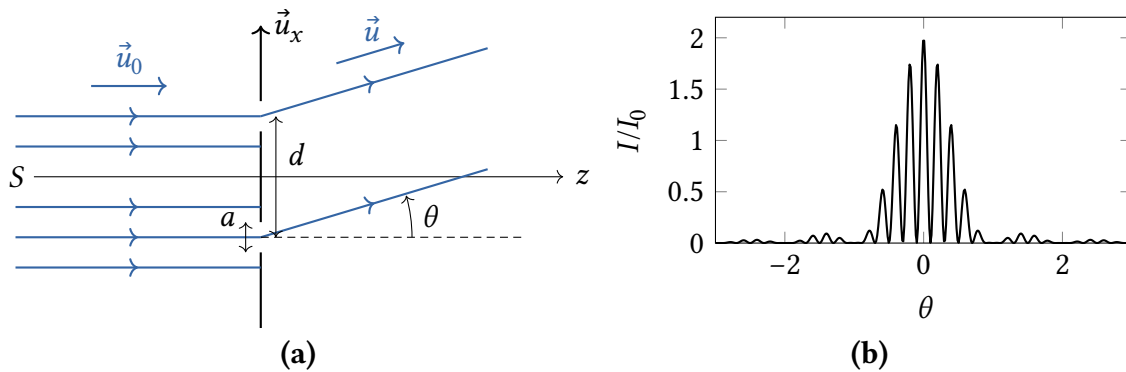


FIGURE 3.8 – (a) Schéma de principe des fentes d'Young. (b) Allure de l'intensité diffractée par les fentes d'Young à l'infini avec $d = 5a$.

Dans cet exercice, nous revenons sur le cas de la diffraction d'une fente infinie, et nous en ajoutons une deuxième, parallèle à la première, de même largeur a , et dont les centres sont décalés d'une distance d . On éclaire ces *fentes d'Young* avec une source monochromatique à l'infini arrivant avec un angle d'incidence nul. Le système complet est présenté en figure 3.8.

Q 3.2 - 7 Calculer l'amplitude lumineuse dans la direction d'observation θ .

Q 3.2 - 8 En déduire l'intensité lumineuse dans la direction θ . On se rappellera que $2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos(2\alpha)$.

Q 3.2 - 9 On suppose que la distance d entre les deux fentes est très grande devant la largeur des fentes a . Lequel des deux termes de l'équation précédente oscille le plus rapidement? En déduire que l'on peut écrire l'intensité lumineuse sous la forme :

$$I(\theta) = I_0 V(\theta)(1 + \cos(A\theta)) \quad (3.2.7)$$

où V et A sont à déterminer. En se rappelant du chapitre sur les interférences, interpréter cette figure de diffraction.

3.2.6 Diffraction par des motifs jumeaux translétés

On envisage la diffraction de Fraunhofer par un diaphragme constitué d'un ensemble de N ouvertures identiques Σ_j centrées en différents points O_j . On cherche donc ici à généraliser le cas des fentes d'Young vu dans l'exercice précédent.

Calcul de l'intensité diffractée par un réseau

L'intensité diffractée sera donc le produit d'un premier terme I_{motif} correspondant à l'intensité diffractée par *un* motif, et un deuxième terme associé aux interférences entre les N ondes émises par les origines O_j des motifs. Nous retiendrons ce résultat très général sous la forme :

$$I(M) = I_{\text{motif}}(M)I_{\text{interf}}(M) \quad (3.2.8)$$

avec

$$I_{\text{interf}} = \left| \sum_{j=1}^N \exp(ik\vec{u} \cdot \overrightarrow{OO_j}) \right|^2 \quad (3.2.9)$$

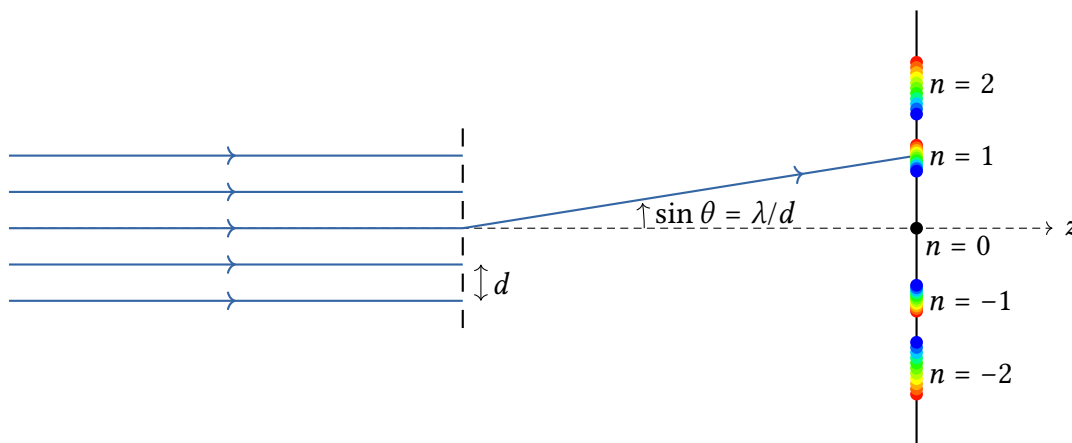


FIGURE 3.9 – Principe de fonctionnement d'un réseau de diffraction. Une onde lumineuse plane est diffractée par le réseau, et on observe des figures d'interférence aux angles tels que $\sin \theta = n\lambda/d$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

On reprend l'exemple de la diffraction de Fraunhofer de la fente infinie, et envisageons maintenant un ensemble de N fentes infinies décalées d'une même distance : $OO_j = jd\vec{u}_x$. On appelle cet ensemble de fentes un *réseau de diffraction*, et on le caractérise par son nombre de trait par millimètre $n = 1/d$. Dans l'expression de l'intensité diffractée 3.2.8, on sait que I_{motif} correspond à la figure de diffraction d'une fente unique, soit une fonction sinus-cardinal. Calculons le deuxième terme, le terme d'interférence :

Calcul du terme d'interférences

Ainsi un réseau de fentes diffractantes produit des interférences constructives pour des angles θ tels que :

$$\sin \theta = \frac{n\lambda}{d} \quad (3.2.10)$$

Cette relation est connue sous le nom de *formule des réseaux* ou *loi de Bragg* et montre que la lumière est déviée selon différents *ordres* en fonction de la longueur d'onde et du pas du réseau. Cette dépendance en longueur d'onde permet de décomposer la lumière selon ses composantes spectrales, de la même manière qu'un prisme de verre. Les réseaux de diffraction sont ainsi particulièrement utiles en spectroscopie.